Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a V-a

Problema 1. Aflaţi numerele de trei cifre care se micşorează de nouă ori dacă li se şterge cifra din mijloc.

Gazeta Matematică

Problema 2.

a) Care puteri ale numărului 2 se scriu cu patru cifre (în baza 10)?

b) Fie n număr natural nenul. Arătaţi că există cel puţin trei puteri a lui 2 care se scriu cu n cifre (în baza 10).

Problema 3. Se consideră 51 de numere naturale pare. Demonstraţi că putem alege două dintre acestea cu proprietatea că produsul dintre suma şi diferenţa lor este divizibil cu 400.

Problema 4. Într-o cutie se află 36 de bile numerotate de la 1 la 36. Ion încearcă să elimine bilele din cutie, în etape. Fiecare etapă constă în următoarea succesiune de operaţii:

- Ion extrage la întâmplare patru bile din urnă.
- Ion elimină câte două bile dintre cele patru dacă diferenţa numerelor înscrise pe acestea se divide cu 3.
- Ion reintroduce în urnă bilele care nu au fost eliminate.

a) Arătaţi că, în fiecare etapă, Ion poate elimina cel puţin două bile.

b) Arătaţi că, dacă în cutie rămân numai patru bile, atunci Ion le poate elimina pe toate.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Aflaţi numerele de trei cifre care se micşorează de nouă ori dacă li se şterge cifra din mijloc.

Soluţie. Fie $\overline{abc}$ un număr cu proprietatea din enunţ. Avem $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{ac}$.
.... **1p**
Se obţine $10\,(a+b) = 8c$.
.... **2p**
Convine doar $c = 5$.
.... **2p**
Rezultă $a + b = 4$, deci numerele căutate sunt 135, 225, 315 şi 405.
.... **2p**

Problema 2.
a) Care puteri ale numărului 2 se scriu cu patru cifre (în baza 10)?
b) Fie n număr natural nenul. Arătaţi că există cel puţin trei puteri a lui 2 care se scriu cu n cifre (în baza 10).

Soluţie. a) Puterile sunt 1024, 2048, 4096, 8192.
.... **3p**
b) Arătăm că există o putere a lui 2 cu n cifre. În caz contrar, există $p \in \mathbb{N}$ cu $2^p < 10^{n-1} < 10^n < 2^{p+1}$. Din ultima inegalitate rezultă $5 \cdot 10^{n-1} < 2^n$, ceea ce conduce la $5 \cdot 10^{n-1} < 2^p < 10^{n-1}$, fals.
.... **1p**
Fie acum $a = 2^m$ prima putere a lui 2 scrisă cu n cifre. Observăm că prima cifră a numărului a este 1, altfel $a > 2 \cdot 10^{n-1}$ şi $\frac{a}{2} = 2^{m-1} > 10^{n-1}$ este o putere mai mică a lui 2 scrisă tot cu n cifre.
.... **2p**
Prin urmare $a < 2 \cdot 10^{n-1}$, $2a < 4 \cdot 10^{n-1}$ şi $4a < 8 \cdot 10^{n-1} < 10^n$, adică 2^m, 2^{m+1} şi 2^{m+2} sunt trei puteri ale lui 2 cu n cifre.
.... **1p**

Problema 3. Se consideră 51 de numere naturale pare diferite două câte două. Demonstraţi că putem alege două dintre acestea cu proprietatea că produsul dintre suma şi diferenţa lor este divizibil cu 400.

Soluţie. Prin împărţirea unui număr par la 100 se poate obţine unul din următoarele 50 de resturi: 0, 2, 4, ..., 98

.... **1p**

Din cele 51 de numere, două dau acelaşi rest la împărţirea prin 100; fie acestea a şi b

.... **2p**

Considerând $a = 100k + 2r$ şi $b = 100p + 2r$, unde $k, p \in \mathbb{N}$, $k > p$, şi $r \in \{0, 1, 2, ..., 49\}$, obţinem $a - b = 100(k - p)$ şi $a + b = 4(25k + 25p + r)$, de unde rezultă că $(a - b)(a + b)$ este divizibil cu 400

.... **4p**

Problema 4. Într-o cutie se află 36 de bile numerotate de la 1 la 36. Ion încearcă să elimine bilele din cutie, în etape. Fiecare etapă constă în următoarea succesiune de operaţii:

- Ion extrage la întâmplare patru bile din urnă.
- Ion elimină câte două bile dintre cele patru dacă diferenţa numerelor înscrise pe acestea se divide cu 3.
- Ion reintroduce în urnă bilele care nu au fost eliminate.

a) Arătaţi că, în fiecare etapă, Ion poate elimina cel puţin două bile.

b) Arătaţi că, dacă în cutie rămân numai patru bile, atunci Ion le poate elimina pe toate.

Soluţie. a) Resturile la împărţirea cu 3 sunt 0, 1 şi 2. Date fiind patru numere naturale, două dintre acestea vor avea acelaşi rest la împărţirea cu 3, deci vor avea diferenţa divizibilă cu 3. Cu alte cuvinte, Ion elimină cel puţin două bile.

.... **3p**

b) Grupăm bilele în trei mulţimi, în fiecare mulţime fiind bilele având numerele cu acelaşi rest la împărţirea cu 3 – $\{3, 6, \ldots, 36\}$, $\{1, 4, \cdots, 34\}$, $\{2, 5, \cdots, 35\}$.

.... **1p**

La fiecare etapă se elimină două sau patru bile având numerele din aceeaşi mulţime.

.... **1p**

Cele patru rămase pot fi toate din aceeaşi mulţime sau două perechi din mulţimi diferite.

.... **1p**

Ion grupează ultimele patru bile extrase în câte două perechi de bile cu numere din aceeaşi mulţime, eliminându-le astfel pe toate.

.... **1p**

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a VI-a

Problema 1. Pe dreapta d se consideră punctele diferite A, B, C, D, E astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$. Fie M un punct exterior dreptei d astfel încât distanţa de la punctul B la dreapta MA este egală cu distanţa de la punctul D la dreapta ME. Arătaţi că distanţele de la punctul C la dreptele MA şi ME sunt egale.

Problema 2. Pentru fiecare număr natural n notăm cu $s(n)$ suma cifrelor sale. Fie a un număr natural cu 2012 cifre, care este divizibil cu 9. Arătaţi că numărul $s(s(s(a)))$ este pătrat perfect.

Gazeta Matematică

Problema 3. În sala de sport se antrenează mai mulţi copii, fete şi băieţi. Numărul fetelor este de două ori mai mare decât numărul băieţilor. Pentru un exerciţiu demonstrativ, antrenorul alege la întâmplare doi copii. Probabilitatea de a alege un băiat şi o fată este de şase ori mai mare decât probabilitatea de a alege doi băieţi. Aflaţi câţi copii sunt în sala de sport.

Problema 4. O mulţime A de numere naturale nenule se numeşte *primară* dacă diferenţa oricăror două elemente ale sale este divizibilă cu 3 sau cu 5.

a) Daţi exemplu de o mulţime primară cu 4 elemente, care conţine elementele 2 şi 2012.

b) Arătaţi că suma elementelor unei mulţimi primare cu 15 elemente este multiplu de 3 sau de 5.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D, E astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$. Fie M un punct exterior dreptei d astfel încât distanţa de la punctul B la dreapta MA este egală cu distanţa de la punctul D la dreapta ME. Arătaţi că distanţele de la punctul C la dreptele MA şi ME sunt egale.

Soluţie. Fie P şi Q picioarele perpendicularelor duse din B şi D pe MA, respectiv ME. Triunghiurile ABP şi EDQ sunt congruente (cazul I.C.), deci $\widehat{MAB} \equiv \widehat{MED}$.

.... **2p**

Fie R şi S proiecţiile lui C pe MA şi ME respectiv.

.... **1p**

Triunghiurile RCA şi SCE sunt congruente (cazul I.U.).

.... **3p**

Rezultă că $CR = CS$, ceea ce trebuia demonstrat.

.... **1p**

Problema 2. Pentru fiecare număr natural n notăm cu $s(n)$ suma cifrelor sale. Fie a un număr natural cu 2012 cifre, care este divizibil cu 9. Arătaţi că numărul $s(s(s(a)))$ este pătrat perfect.

Soluţie. Numărul $s(a)$ este divizibil cu 9 şi este cel mult egal cu $9 \cdot 2012 = 18\,108$.

.... **3p**

Cum $s(a)$ are cel mult 5 cifre, rezultă că numărul $s(s(a))$ este divizibil cu 9 şi este cel mult egal cu 45.

.... **2p**

Rezultă că $s(s(s(a))) = 9$, care este pătrat perfect.

.... **2p**

Observaţie. În lipsa altor realizări, pentru menţionarea faptului că dacă un număr este divizibil cu 9, atunci suma cifrelor este divizibilă cu 9 se acordă **1 punct**, iar pentru deducerea faptului că $s(s(s(a)))$ se divide cu 9 se acordă **2 puncte**. Aceste punctaje **nu** se cumulează.

Problema 3. În sala de sport se antrenează mai mulţi copii, fete şi băieţi. Numărul fetelor este de două ori mai mare decât numărul băieţilor.

Pentru un exerciţiu demonstrativ, antrenorul alege la întâmplare doi copii. Probabilitatea de a alege un băiat şi o fată este de şase ori mai mare decât probabilitatea de a alege doi băieţi. Aflaţi câţi copii sunt în sala de sport.

Soluţie. Fie n numărul băieţilor şi $2n$ numărul fetelor. Dacă antrenorul alege doi băieţi, pe primul îl alege dintre cei n, pe al doilea dintre cei $n-1$ rămaşi şi, cum fiecare grupă de doi băieţi este astfel numărată de câte două ori, vom avea $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cazuri favorabile.

.... **3p**

Dacă antrenorul alege un băiat şi o fată, există $n \cdot 2n = 2n^2$ cazuri favorabile.

.... **2p**

Numărul cazurilor posibile fiind acelaşi – anume $\dfrac{3n(3n-1)}{2}$ – condiţia din enunţ revine la $6 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} = 2n^2$, de unde $n = 3$. În sala de sport se află 9 copii.

.... **2p**

Notă. Dacă elevul precizează că pentru ambele evenimente numărul cazurilor posibile este acelaşi, fără a-l calcula efectiv, el nu va fi depunctat.

Problema 4. O mulţime A de numere naturale nenule se numeşte *primară* dacă diferenţa oricăror două elemente ale sale este divizibilă cu 3 sau cu 5.

a) Daţi exemplu de o mulţime primară cu 4 elemente, care conţine elementele 2 şi 2012.

b) Arătaţi că suma elementelor unei mulţimi primare cu 15 elemente este multiplu de 3 sau de 5.

Soluţie. a) De exemplu $A = \{2, 12, 22, 2012\}$.

.... **2p**

b) Vom arăta că diferenţele dintre elementele unei mulţimi primare sunt toate divizibile cu 3 sau toate divizibile cu 5.

Presupunând contrariul, fie $a < b < c$ sunt trei elemente ale unei mulţimi primare astfel încât $3 \mid b-a$ şi $5 \nmid b-a$, respectiv $5 \mid c-a$ şi $3 \nmid c-a$ (celelalte cazuri se tratează analog).

.... **1p**

Fie $k, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $b-a = 3k$ şi $c-a = 5p$; atunci $c-b = 5p-3k$. Dacă $3 \mid c-b$, atunci $3 \mid p$, de unde rezultă că $3 \mid c-a$, fals; la fel, dacă $5 \mid c-b$, atunci $5 \mid k$, deci $5 \mid b-a$, din nou fals.

.... **2p**

Fie $A = \{a_1 < a_2 < ... < a_{15}\}$ o mulţime primară cu 15 elemente.

Dacă toate diferenţele dintre elementele lui A se divid cu 3, atunci $a_2 = a_1 + 3k_1$, $a_3 = a_1 + 3k_2$, ..., $a_{15} = a_1 + 3k_{14}$, unde $k_1, k_2, ..., k_{14} \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a_1 + a_2 + ... + a_{15} = 15a_1 + 3\left(k_1 + k_2 + ... + k_{14}\right)$, care este multiplu de 3.

.... **1p**

Dacă toate diferenţele dintre elementele lui A se divid cu 5, atunci $a_2 = a_1 + 5p_1$, $a_5 = a_1 + 5p_2$, ..., $a_{15} = a_1 + 5p_{14}$, unde $p_1, p_2, ..., p_{14} \in \mathbb{N}$. de unde rezultă că $a_1 + a_2 + ... + a_{15} = 15a_1 + 5\left(p_1 + p_2 + ... + p_{14}\right)$, care este multiplu de 5.

.... **1p**

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numere naturale impare $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2012}$. Demonstraţi că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2 - 1}$ este iraţional.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b şi c cu proprietatea că $a^2 + ab + ac - bc = 0$.

a) Arătaţi că dacă două dintre numerele a, b şi c sunt egale, atunci cel puţin unul dintre cele trei numere este iraţional.

b) Arătaţi că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (m, n, p) cu proprietatea că $m^2 + mn + mp - np = 0$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Se consideră punctele $M, N \in (BC)$, $Q \in (AB)$ şi $P \in (AC)$ astfel încât $MNPQ$ este dreptunghi. Demonstraţi că dacă centrul dreptunghiului $MNPQ$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $AB = AC = 3AP$.

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E pe latura AB. Dreapta DE intersectează dreapta BC în punctul F, iar dreapta CE intersectează dreapta AF în punctul G. Demonstraţi că dreptele BG şi DF sunt perpendiculare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numere naturale impare a_1, a_2, $\ldots$, a_{2012}. Demonstraţi că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2 - 1}$ este iraţional.

Soluţie. Numărul A este raţional dacă şi numai dacă numărul $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2 - 1$ este pătrat perfect.

.... **1p**

Pătratul unui număr impar este de forma $4k + 1$, cu $k \in \mathbb{N}$.

.... **2p**

Suma $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2$ este un multiplu de 4, deoarece $4 \mid 2012$.

.... **2p**

Atunci $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2 - 1$ este un număr impar de forma $4k + 3$, deci nu e pătrat perfect.

.... **2p**

Problema 2. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b şi c cu proprietatea că $a^2 + ab + ac - bc = 0$.

a) Arătaţi că dacă două dintre numerele a, b şi c sunt egale, atunci cel puţin unul dintre cele trei numere este iraţional.

b) Arătaţi că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (m, n, p) cu proprietatea că $m^2 + mn + mp - np = 0$.

Soluţie. a) Observăm că relaţia este simetrică în b şi c, deci avem două cazuri: $a = b$ sau $b = c$. Dacă $a = b$ relaţia devine $2a^2 = 0$, fals.

.... **2p**

Dacă $b = c$, atunci $a^2 + 2ab = b^2$, de unde $(a + b)^2 = 2b^2$. Rezultă $a + b = b\sqrt{2}$, deci $a = b(\sqrt{2} - 1)$. Dacă b este iraţional, el satisface cerinţa. Dacă b este raţional, atunci a este iraţional şi cerinţa este îndeplinită.

.... **2p**

b) Căutam triplete de forma (m, mu, mv), cu m, u, v numere naturale nenule. Relaţia se scrie $1 + u + v - uv = 0$ sau $(u - 1)(v - 1) = 2$.

.... **2p**

Luăm $u = 2$, $v = 3$ şi obţinem tripletele $(m, 2m, 3m)$, $m \in \mathbb{N}^*$, care verifică cerinţa.

.... **1p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Se consideră punctele $M, N \in (BC)$, $Q \in (AB)$ şi $P \in (AC)$ astfel încât $MNPQ$ este dreptunghi. Demonstraţi că centrul dreptunghiului $MNPQ$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă $AB = AC = 3AP$.

Soluţie. Fie D mijlocul laturii BC şi fie G centrul dreptunghiului $MNPQ$. Din ipoteză rezultă că punctele A, G, D sunt coliniare şi $AG = 2 \cdot GD$.

.... **1p**

Paralela din E la BC intersectează segmentele AB, QM, PN şi AC în punctele E, R, S şi F, respectiv. Atunci $GE = GF$ şi $GR = GS$, de unde rezultă $ER = SF$.

.... **2p**

Triunghiurile QRE şi PSF sunt congruente − cazul L.U.L. Obţinem $\angle QER = \angle PFS$, de unde $\angle ABC = \angle ACB$ şi $AB = AC$.

.... **2p**

Pe de altă parte, cum G este mijlocul lui PM, segmentul GF este linie mijlocie în triungiul PMC, deci $PF = FC$.

.... **1p**

Din teorema lui Thales, obţinem $\frac{CF}{FA} = \frac{DG}{GA} = \frac{1}{2}$, prin urmare $AP = PF = FC$, deci $AB = AC = 3AP$.

.... **1p**

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E pe latura AB. Dreapta DE intersectează dreapta BC în punctul F, iar dreapta CE intersectează dreapta AF în punctul G. Demonstraţi că dreptele BG şi DF sunt perpendiculare.

Soluţie. Notăm $AB = a$, $AE = x$ şi fie $P \in (BC)$ astfel încât $BP = x$. Din congruenţa triunghiurilor ADE şi ABP rezultă că $AP \perp DF$.

.... **2p**

Triunghiurile AED şi BEF sunt asemenea, deci $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AD}{BF}$, de unde $BF = \dfrac{a\,(a-x)}{x}$.

.... **2p**

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABF cu transversala $G - E - C$, obţinem $\dfrac{AG}{GF} = \dfrac{BC}{FC} \cdot \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{x^2}{a\,(a-x)}$.

.... **2p**

Cum $\dfrac{BP}{BF} = \dfrac{x^2}{a\,(a-x)}$, rezultă $BG \parallel AP$, de unde $BG \perp DF$.

.... **1p**

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie a şi b două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele $a - \sqrt{ab}$ şi $b - \sqrt{ab}$ sunt raţionale. Arătaţi că numerele a şi b sunt raţionale.

Gazeta Matematică

Problema 2. Piramida $VABCD$ are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile laterale sunt congruente. Demonstraţi că planul (VCD) formează unghiuri congruente cu planele (VAC) şi respectiv (BAC) dacă şi numai dacă unghiurile $\sphericalangle VAC$ şi $\sphericalangle BAC$ sunt congruente.

Problema 3. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c. Determinaţi cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că

$$\frac{1}{ax+b+c} + \frac{1}{a+bx+c} + \frac{1}{a+b+cx} \geq \frac{n}{a+b+c},$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $AD \perp BC$ şi $AC \perp BD$. Notăm cu E şi F proiecţiile punctului B pe dreptele AD şi AC, respectiv. Fie M mijlocul segmentului AB şi fie N mijlocul segmentului CD. Arătaţi că $MN \perp EF$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie a şi b două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele $a-\sqrt{ab}$ şi $b-\sqrt{ab}$ sunt raţionale. Arătaţi că numerele a şi b sunt raţionale.

Soluţie. Deoarece raportul a două numere raţionale este număr raţional şi $\dfrac{a-\sqrt{ab}}{b-\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, rezultă că există $q\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{a}=q\sqrt{b}$.

.... **3p**

Atunci $b-\sqrt{ab}=b\,(1-q)$ este număr raţional, de unde, ţinând cont că $q\neq 1$ (altfel am avea $a=b$), rezultă că b este număr raţional.

.... **2p**

Întrucât $a=q^2b$, rezultă că şi a este număr raţional.

.... **2p**

Problema 2. Piramida $VABCD$ are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile laterale sunt congruente. Demonstraţi că planul (VCD) formează unghiuri congruente cu planele (VAC) şi respectiv (BAC) dacă şi numai dacă unghiurile $\sphericalangle VAC$ şi $\sphericalangle BAC$ sunt congruente.

Soluţie. Fie S proiecţia punctului D pe dreapta AC. Din $DS\perp VO$ şi $DS\perp AC$ rezultă $DS\perp(VAC)$, prin urmare proiecţia pe planul (VAC) a triunghiului VDC este triunghiul VSC.

.... **2p**

Fie u şi v măsurile unghiurilor formate de planul (VCD) cu planele (VAC) şi respectiv (BAC). Avem echivalenţele

$$u = v \Leftrightarrow \cos u = \cos v \Leftrightarrow \frac{\text{aria}[VSC]}{\text{aria}[VDC]} = \frac{\text{aria}[COD]}{\text{aria}[VDC]}$$
$$\Leftrightarrow \text{aria}[VSC] = \text{aria}[COD] \Leftrightarrow VO \cdot CS = \frac{1}{2} AB \cdot BC.$$

.... **2p**

Din teorema catetei avem $DC^2 = CS \cdot CA$. Cum $DC = AB$, rezultă $CS = \frac{AB^2}{AC}$.

.... **1p**

În consecinţă, $u = v \Leftrightarrow VO \cdot AB = \frac{1}{2} AC \cdot BC \Leftrightarrow \dfrac{VO}{OA} = \dfrac{BC}{AB} \Leftrightarrow \sphericalangle VAC = \sphericalangle BAC$, ceea ce trebuia demonstrat.

.... **2p**

Problema 3. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c. Determinaţi cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că

$$\frac{1}{ax+b+c} + \frac{1}{a+bx+c} + \frac{1}{a+b+cx} \geq \frac{n}{a+b+c},$$

pentru orice $x \in [0,1]$.

Soluţie. Pentru $x = 1$ obţinem $\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{n}{a+b+c}$, de unde $n \leq 3$.

.... **2p**

Vom arăta că numărul cerut este $n = 3$. Este suficient să arătăm că $E(x) \overset{not}{=} \dfrac{1}{ax+b+c} + \dfrac{1}{a+bx+c} + \dfrac{1}{a+b+cx} \geq \dfrac{3}{a+b+c}$, pentru orice $x \in [0,1]$.

.... **1p**

Folosind inegalitatea dintre media armonică şi media aritmetică a numerelor $ax + b + c$, $a + bx + c$ şi $a + b + cx$, rezultă că $E(x) \geq \frac{9}{(a+b+c)(x+2)}$.

.... **3p**

Cum $x \in [0,1]$, rezultă $x + 2 \leq 3$, de unde se obţine că $E(x) \geq \frac{3}{a+b+c}$, pentru orice $x \in [0,1]$.

.... **1p**

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $AD \perp BC$ şi $AB \perp CD$. Notăm cu E şi F proiecţiile punctului B pe dreptele AD şi AC, respectiv. Fie M mijlocul segmentului AB şi fie N mijlocul segmentului CD. Arătaţi că $MN \perp EF$.

Soluţie. Deoarece AD este perpendiculară pe BC şi pe BE, rezultă $AD \perp (BEC)$, de unde $AD \perp CE$. Analog obţinem $DF \perp AC$.

.... **2p**

Fie $\{H\} = CE \cap DF$. Deoarece BH este intersecţia planelor (BEC) şi (BFC), deducem că $BH \perp (ACD)$.

. . . . **2p**

Rezultă că proiecţia Q a punctului M pe planul (ACD) este mijlocul segmentului $[AH]$.

. . . . **1p**

Cercurile ciecumscrise triunghiurilor AEF şi BEF au centrele N şi Q. Cum linia centrelor este perpendiculară pe coarda comună, avem $NQ \perp EF$.

. . . . **1p**

Deoarece $MQ \perp EF$, rezultă $EF \perp (MQN)$, deci $MN \perp EF$.

. . . . **1p**