

EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

Etapa a II-a – 03.03.2012

Barem de corectare și notare

Clasa a XII-a M1

Subiectul I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	A	A	E	D	D	D	E	B	D	C

Subiectul II

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de puncte, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

$$1. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' \ln x dx \quad (1 \text{ p}) = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^e \quad (1 \text{ p}) = \frac{1}{2} \quad (1 \text{ p}).$$

$$2. \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \int_0^1 (x^2)' e^{x^2} dx \quad (1 \text{ p}) = \int_0^1 e^t dt \quad (1 \text{ p}) = e - 1 \quad (1 \text{ p}).$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \sin' x dx \quad (1 \text{ p}) = \frac{(\sin x)^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} \quad (1 \text{ p}) = \frac{1}{2} \quad (1 \text{ p}).$$

$$4. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx \quad (1 \text{ p}) = \\ = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{\pi}{4} \quad (1 \text{ p}) = 1 - \frac{\pi}{4} \quad (1 \text{ p}).$$

$$5. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2)'}{\sqrt{1+x^4}} dx \quad (1 \text{ p}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \quad (1 \text{ p}) = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) \quad (1 \text{ p}).$$

$$6. \int_1^3 \frac{2}{x^2+2x} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx \quad (1 \text{ p}) = (\ln x - \ln(x+2)) \Big|_1^3 \quad (1 \text{ p}) = \ln \frac{9}{5} \quad (1 \text{ p}).$$

$$7. (x \circ y) \circ z = (x \circ y) + z + 1 = x + y + z + 2 \quad (1 \text{ p}). \quad x \circ (y \circ z) = x + (y \circ z) + 1 = x + y + z + 2 \quad (1 \text{ p}), \text{ de unde concluzia } (1 \text{ p}).$$

$$8. \text{ Avem } x \circ y = xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1 \quad (1 \text{ p}). \text{ Fie } x, y \in H \Rightarrow x, y > -1 \Rightarrow x+1, y+1 > 0 \quad (1 \text{ p}), \text{ deci } x \circ y = (x+1)(y+1) - 1 > -1 \Rightarrow x \circ y \in H \quad (1 \text{ p}).$$

9. Fie e elementul neutru. Atunci $x \circ e = e \circ x = x \Rightarrow xe + x + e = x, \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow e = 0$ (1 p). Un element $x \in \mathbb{Q}$ este simetrizabil dacă există $x' \in \mathbb{Q}$ cu $x \circ x' = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x'+1) = 1$ (1 p), ceea ce este echivalent cu $x \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ (1 p).

10. Suma elementelor $\hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{24}$ este $\widehat{300} \text{ (2 p)} = \hat{0} \text{ (1 p)}$.

Subiectul III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx \text{ (1 p)} = \ln(e^x+1) \Big|_0^1 = \ln \frac{e+1}{2} \text{ (1 p)}$.

2. $\int_1^2 \frac{x+2}{x^3+2x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2} \right) dx \text{ (1 p)} = \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+2) \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 \text{ (1 p)}$.

3. Avem $0 \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{2} dx \text{ (1 p)}$. Cum $\int_0^1 x^n \sqrt{2} dx = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$, din lema cleștelui rezulta cerința (1 p).

4. Avem $A(n) \cdot A(m) = A(n+m) \in G$, pentru că $m+n \in \mathbb{Z}$ (1 p). Înmulțirea matricelor este asociativă, $I_2 = A(0) \in G$ și inversa matricei $A(n)$ este $A(-n)$ (1 p).

5. Dacă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_{24}, a \in \{0, 1, \dots, 23\}$ este element de ordin 4 al grupului $(\mathbb{Z}_{24}, +)$, atunci $\hat{a} + \hat{a} + \hat{a} + \hat{a} = \hat{0}$, deci 6 divide a (1 p), de unde $\hat{a} \in \{\hat{0}, \hat{6}, \hat{12}, \hat{18}\}$. Observăm că elementul $\hat{0}$ are ordinul 1, elementul $\hat{12}$ are ordinul 2, iar elementele $\hat{6}$ și $\hat{18}$ au ordinul 4, deci sunt două elemente de ordin 4 (1 p).

- Total 100 de puncte, din care 10 sunt din oficiu.