

## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

**Etapa a II-a – 03.03.2012**

### Barem de corectare și notare

**Clasa a X-a 4 ore**

#### Subiectul I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	D	D	C	A	C	E	C	A	C	A

#### Subiectul II

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1.  $\log_2 7 + \log_4 7 - 9 \log_8 \sqrt{7} = \log_2 7 + \frac{1}{2} \log_2 7 - \frac{9}{2} \log_8 7$  (2 p).

$\log_2 7 + \frac{1}{2} \log_2 7 - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} \log_2 7 = 0$  (1 p).

2. Ecuația devine  $x^2 + 1 = 5$  (1 p)  $\Leftrightarrow x^2 = 4$  (1 p), deci  $x = \pm 2$  (1 p).

3. Ecuația se scrie echivalent  $2^x - 2^{x+1} + 0,5 = 0 \Leftrightarrow -2^x + \frac{1}{2} = 0$  (1 p)  $2^x = 2^{-1}$  (1 p),

deci  $x = -1$  (1 p).

4.  $\log_2 (\sqrt{2} + 1) + \log_2 (\sqrt{2} - 1) = \log_2 (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$  (1 p)  $= \log_2 (2 - 1)$  (1 p)  $= 0$ , deci relația este adevărată (1 p).

5. Ecuația se scrie echivalent  $\log_3 (2 + x) = \log_3 3$  (1 p)  $\Leftrightarrow 2 + x = 3$  (1 p), deci  $x = 1$  (1 p).

6. Fie  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Relația devine  $(a + bi) + 2(a - bi) = 3 - 2i$  (1 p)

$\Leftrightarrow 3a - bi = 3 - 2i \Leftrightarrow a = 1, b = 2$  (1 p). Deci  $z = 1 + 2i$  (1 p).

7.  $\left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^9 = \cos \frac{9\pi}{3} + i \sin \frac{9\pi}{3}$  (2 p)

$= \cos 3\pi + i \sin 3\pi = -1 + 0i = -1$  (1 p).

8. Discriminantul este egal cu  $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4 = -1$  (1 p). Rezultă  $x_1 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$  (1 p),

$x_2 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$  (1 p).

9.  $f(x) = f(y) \Rightarrow 3x - 5 = 3y - 5$  (1 p),  $\Rightarrow x = y$  (1 p), deci  $f$  este injectivă (1 p).

10. Ecuația  $f(x) = y, y \in (0, \infty)$  se scrie  $\frac{1}{x} = y$  (1 p), și are soluția unică  $x = \frac{1}{y} \in (0, \infty)$  (1 p), deci  $f$  este bijectivă (1 p).

### Subiectul III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. Ecuația devine  $(x+4)^{\frac{1}{2}} = (x+4)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x+4=1$  sau  $x+4=0$  (1 p), de unde  $x=-3$  sau  $x=-4$  (1 p).

2. Cu notația  $t = 2^x$  ecuația devine  $t^2 + 2\sqrt{2}t - 6 = 0$ . Discriminantul este  $\Delta = 32$ , deci  $t_1 = -3\sqrt{2}, t_2 = \sqrt{2}$  (1 p). Ecuația  $2^x = -3\sqrt{2}$  nu are soluții. Ecuația  $2^x = \sqrt{2}$  are soluția  $x = \frac{1}{2}$  (1 p). (Alternativ, se utilizează monotonia funcției din membrul stâng al ecuației date.)

3. Din relația dată rezultă  $|z|^3 = 4|z|$ , deci  $|z| = 0$  sau  $|z| = 2$  (1 p). Pentru  $|z| = 0$  avem soluția  $z = 0$ . Pentru  $|z| = 2$ , ecuația devine  $z^3 = 8 \Rightarrow z_1 = 2, z_2 = 2\varepsilon, z_3 = 2\varepsilon^2$ , unde  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$  (1 p).

4. Fie  $n, m \in \mathbb{N}$  cu  $f(n) = f(m)$ . Avem  $\{2^n \sqrt{2}\} = \{2^m \sqrt{2}\} \Leftrightarrow 2^n \sqrt{2} - 2^m \sqrt{2} = [2^n \sqrt{2}] - [2^m \sqrt{2}] \in \mathbb{Z}$  (1 p). Cum  $(2^n - 2^m) \sqrt{2} \in \mathbb{Z}$  și  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , rezultă că  $2^n - 2^m = 0$ . Deci  $n = m$  și  $f$  este injectivă. (1 p).

5. Fie  $t_1, t_2, \dots, t_6 \in [0, 2\pi)$  argumentele numerelor date. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că numerele  $t_1, t_2, \dots, t_6$  sunt ordonate crescător. Dacă  $t_6 - t_1 \geq \frac{5\pi}{3}$ , cum

$t_6 - t_1 < 2\pi$ , avem  $\operatorname{Re}(z_6 \cdot \bar{z}_1) = \cos(t_6 - t_1) \geq \frac{1}{2}$  (1 p). Dacă  $t_6 - t_1 < \frac{5\pi}{3}$ , cum

$t_6 - t_1 = (t_6 - t_5) + (t_5 - t_4) + \dots + (t_2 - t_1)$ , rezultă că există  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$  cu

$t_{i+1} - t_i < \frac{\pi}{3}$ . Deci  $\operatorname{Re}(z_{i+1} \cdot \bar{z}_i) = \cos(t_{i+1} - t_i) \geq \frac{1}{2}$  (1 p).

- Total 100 de puncte, din care 10 sunt din oficiu.