OLIMPIADA DE MATEMATICA- FAZA LOCALA

25 .02.2012

CLASA a IX-a M_1

1. Să se calculeze suma următoare şi să se demonstreze , prin inducţie matematică, formula găsită, pentru orice număr natural n≥1:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

2. Rezolvați ecuația : $\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]=1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

3. Să se demonstreze că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, dacă şi numai dacă există a,b∈**R*** astfel încât să aibă loc relaţia:
$b_1+b_2+\ldots+b_n = a\cdot b^n - a$, $\forall n\in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, $b \neq 1$.

4. În Δ ABC se considerăpunctele M, N şi P pelaturile AB, AC respectiv BC astfelîncât $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{PC}=\frac{2}{9}\overrightarrow{PB}$

a) Exprimaţi $\overrightarrow{BN}$ în funcţie de $\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BC}$

b) Arătaţicăpunctele M, N şi P suntcoliniare.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7p.

OLIMPIADA DE MATEMATICA- FAZA LOCALA

25 .02.2012

CLASA a IX-a M_2

1. O familie are 4 perechi de iepuri, la fiecare trei luni numarul perechilor se dubleaza.

a) Cate perechi de iepuri va avea familia dupa doi ani?

b) In cat timp familia va avea în plus 504 iepuri?

2. Fie $f : R \to R$ cu proprietatea ca $5f(x)+2f(-x)=2x^3+5x, \forall x \in R$

a) sa se arate ca f este functie impara

b) sa se calculeze $f(-100)+f(-99)+...+f(99)+f(100)$

3. Să se demonstreze că:

a) $7 \cdot 9^{2012} + 2 \cdot 9^2 - 2 \cdot 2^2$ este multiplu de 7 ;

b) Pentru orice numar natural $n \geq 2$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ este divizibil cu 7 .

4. Fie ABCD paralelogram, AC ∩ BD={O}. Arătaţi că oricare ar fi M un punct din plan are loc relaţia:

$$4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

<u>*Notă :*</u> *Toate subiectele sunt obligatorii,*

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7p.

OLIMPIADA DE MATEMATICA- FAZA LOCALA

25 .02.2012

CLASA a X-a M_1

1. Se considera $f: C \setminus \{-5i\} \to C \setminus \{2i\}, \quad f(z) = \dfrac{2z+4i}{5-iz}$.

*a)*Pentru $z=x+iy$, determinati partea reala si partea imaginara a lui *f(z)*

*b)*Demonstrati ca f este functie inversabila si determinati inversa sa.

2. Sa se rezolve ecuatia : $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$

3. Demonstraţi inegalitatea: $\dfrac{1}{\log_{a_1} a_2} + \dfrac{1}{\log_{a_2} a_3} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a_n} a1} \geq$ n.

4. Daca a+b+c=0, $a,b,c \in R^*$, demonstrati ca $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} = \left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|$

<u>Notă :</u> *Toate subiectele sunt obligatorii,*

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7p.

OLIMPIADA DE MATEMATICA- FAZA LOCALA

25 .02.2012

CLASA a X-a M_2

1. Determinati numerele complexe z cu proprietatea $z^2 + \bar{z} = 0$

2. Determinati functia bijectivă $f : \Re \to \Re, f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ care are inversa

$g : R \to R, g(t) = 2t - 5$

3. Să se rezolve in **R** ecuația:

$$5\log_2 3 + 2\log_2 \sqrt{(x-2)\sqrt{8}} - 1\frac{2}{3}\log_2 27 = 1{,}5$$

4. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \ldots.. \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \geq 100 .$$

<u>Notă :</u> Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7p.

OLIMPIADA DE MATEMATICA- FAZA LOCALA

25 .02.2012

CLASA a XI-a M_1

1. Se considera sirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}, (\forall)n\in N^*$.Admitem cunoscut faptul ca $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi^2}{6}$ si consideram sirurile $(b_n)_{n\geq 1},(c_n)_{n\geq 1}$ definite prin $b_n=a_n+\frac{1}{n}, c_n=a_n+\frac{1}{n+1}, (\forall)n\in N^*$.

i) Să se arate că șirurile $(b_n)_{n\geq 1},(c_n)_{n\geq 1}$ sunt strict monotone ;

ii) Să se arate că $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{\pi^2}{6}$;

iii) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}n\left(a_n-\frac{\pi^2}{6}\right)$

2. Fie $A\in M_2(R), A=\begin{pmatrix}\cos\alpha+\sin\alpha & 2\sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha-\sin\alpha\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n\in N$.

3. Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty}\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\ln(1+kx)\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{2}{n^2}}$.

4. Sa se arate ca daca x+y+z>0 ,atunci d = $\begin{vmatrix}x & z & y\\ y & x & z\\ z & y & x\end{vmatrix}\geq 0, \forall x,y,z\in\Re$.

<u>Notă :</u> Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7p.

OLIMPIADA DE MATEMATICA- FAZA LOCALA

25 .02.2012

CLASA a XI-a M$_2$

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Sa se determine a,b numere reale astfel incat

$A^2 = aA + bI_2$ si apoi aratati ca $A^n = nA + (1-n)I_2, \forall n \in N^*$

2. Să se determine parametrul real a astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-ax\right)$

să fie finită și nenulă.

3. Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{64-x^2}{x^2-7x+10}}$, unde $D \in \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

a) (4p) Determinaţi D.
b) (3p) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x)$.

4. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ în mulțimea numerelor complexe:

<u>Notă :</u> Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7p.

OLIMPIADA DE MATEMATICA- FAZA LOCALA

25 .02.2012

CLASA a XII-a M_1

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup și *H* și *N* două subgrupuri ale sale.

a) Arătați că $H \cap N$ este subgrup al lui G.(3p)

b) Arătați că în grupul aditiv al numerelor întregi $(Z,+)$, are loc relația $2Z \cap 3Z = 6Z$ (4p)

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{\frac{k}{n^2}}$

3. Să se determine funcția $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ care admite o primitivă F cu proprietatea $e^x \cdot F(x) = f(x), (\forall) x \geq 0$ si $f(0)=e$.

4. Fie $A = \left\{ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} & \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} & \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \end{pmatrix} \mid x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \right\}$

Demonstrati ca $(A,\cdot)$ este grup abelian.

<u>*Notă :*</u> *Toate subiectele sunt obligatorii,*

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7p.

OLIMPIADA DE MATEMATICA- FAZA LOCALA

25 .02.2012

CLASA a XII-a M_2

1. Fie mulţimea $G=(1,\infty)$ şi legea de compoziţie definită pe G prin

$$x\circ y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2},\forall x,y\in G.$$

a) (3p) Să se arate că $(G,\circ)$ este grup abelian

b) (2p) Să se determine numerele reale m şi n astfel încât funcţia $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=\sqrt{mx+n}$ să fie izomorfism între $(R_+^*,\cdot)$ şi $(G,\circ)$.

c) (2p) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{de\quad 2012\quad ori}=\sqrt{2}$, unde $x\in G$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases}\hat{2}x+y+\hat{4}z=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y+z=\hat{4}\\ \hat{6}x+\hat{4}y+\hat{5}z=\hat{1}\end{cases}$ cu coeficienţi în Z_8. Dacă (x_0,y_0,z_0) este

soluţie a sistemului, să se calculeze expresia $E=x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}+z_0^{\ 2}$.

3. Să se calculeze $\int\frac{x+arccosx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

4. Să se calculeze: $\int_0^1\frac{3e^{2x}\cdot x^2+e^x}{e^{2x}\cdot x^6-2x^3\cdot e^x+3e^{2x}+1}dx$.

<u>Notă :</u> Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7p.