

**OLIMPIADA DE MATEMATICA****FAZA LOCALĂ**

18 februarie 2012

Clasa a - IX – a

SUBIECTUL 1

Să se afle cel mai mic număr real x astfel încât $[x] = -20\{x\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului x .

Prof. Manuela Stroie, prof. Iulian Stroie

SUBIECTUL 2

Fie $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |x-n| + |x+n| \leq 2n\}, n \in \mathbb{R}$.

- a) Să se determine mulțimea A_n .
b) Să se determine $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{100}$

Prof. Aurelia Stanciu

SUBIECTUL 3

Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Arătați că :

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq 1$$

Prof. Florin Nicolaescu

SUBIECTUL 4

Triunghiul ABC are latura AB egală cu 1. Știind că unghiurile A și B au 15, respectiv 60 de grade, determinați lungimile celorlalte laturi fără, a utiliza trigonometria.

G.M. (Supliment cu exerciții – Aprilie 2011)

NOTĂ :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7


OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - X – a

SUBIECTUL 1

 Să se rezolve ecuația $4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x + 25^x = 2 \cdot 10^x + 2 \cdot 15^x$

Prof. Manuela Stroie, prof. Iulian Stroie

SUBIECTUL 2

Să se rezolve ecuația :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2) + \log_{\frac{1}{3}}(|x| + 1) + (x^2 + 2)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 0$$

Prof. George Netu – Lic. “Tudor Vladimirescu”

SUBIECTUL 3

Fie $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $a, b \in \{-1; 1\}$ și $x_n = a^n + b^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că

$$(x_{2n} + x_{8n})(x_{3n} + x_{5n}) = (x_n + x_{7n})(x_{4n} + x_{6n}), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

G.M. Nr 1/2011

SUBIECTUL 4

Dacă a, b, c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic cu diagonala de lungime 1, să se arate că :

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c + (a + b + c) \ln(a + b + c) \leq 0.$$

Prof. Florin Nicolaescu

NOTĂ :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18 februarie 2012
Clasa a - XI – a

SUBIECTUL 1

Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^{2012} = O_2$. Arătați că $A^{2011} = O_2$.

Prof. Manuela Stroie, prof. Iulian Stroie

SUBIECTUL 2

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 + B^2) = 0$. Să se arate că $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Prof. Florin Nicolaescu

SUBIECTUL 3

Știind că există, este finită și nenulă, să se calculeze :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n \sqrt[n]{n} + b)^{\frac{n}{\ln n}}$$

G.M. Nr. 2/ 2011

SUBIECTUL 4

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}$; $a \in \mathbb{R}$ și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $a_n = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n)$

a) Exprimați a_n sub o formă mai simplă.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{3a_2} + \dots + \frac{1}{(n+1)a_n} \right)$

Prof. Aurelia Stanciu

NOTĂ :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.


OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - XII – a

SUBIECTUL 1

 Sa se arate ca $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$.

Prof. Radulescu Valentin

SUBIECTUL 2

Să se arate că :

 a) Pe mulțimea $G = (-1 ; 1)$ se poate defini operația algebrică

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

 iar $(G ; *)$ este un grup abelian .

 b) Funcția $f : (-1 ; 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ este un izomorfism între grupul $(G ; *)$

 și grupul $(\mathbb{R} ; +)$.

 c) Grupul $(G ; *)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^* ; \cdot)$.

SUBIECTUL 3

 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea :

$$\int_0^1 f(nax) dx = 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } a \in \mathbb{R}^*.$$

 Arătați că f este identic nulă.

Prof. Chiriță Aurel C.N.I.Minulescu

SUBIECTUL 4

 Să se calculeze : $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{1}{1 + \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}} dx$

G.M. Nr. 4/2011

NOTĂ :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - IX – a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

$0 \leq \{x\} < 1 \Rightarrow -20\{x\} \in (-20, 0] \Rightarrow [x] \in (-20, 0]$	2 p
Un număr real este cu atât mai mic cu cât are partea întreagă mai mică. Obținem $[x] = -19$	2 p
$-19 = -20\{x\} \Rightarrow \{x\} = 0,95$	1 p
$x = [x] + \{x\} \Rightarrow x = -18,05$	2 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 2

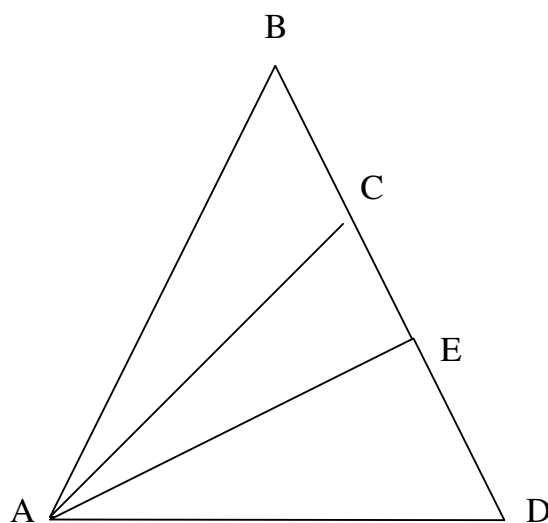
a) Pentru $n=0$ obținem $A_0 = \{x \in R : x + x \leq 0\} = \{0\}$	1 p
Pentru $n < 0$, $\Rightarrow A_n = \emptyset$	1 p
Pentru $n > 0$, avem : Dacă $x \leq -n \Rightarrow -x + n - x - n \leq 2n \Rightarrow x \geq -n$; deci $x = -n$	1 p
Dacă $x \in (-n; n) \Rightarrow -x + n + x + n \leq 2n$, adevărat	1 p
Dacă $x \geq n \Rightarrow x - n + x + n \leq 2n \Rightarrow x \leq n \Rightarrow x = n$	1 p
Obținem $A_n = [-n; n]$	1 p
b) Avem $[-1; 1] \cap [-2; 2] \cap \dots \cap [-100; 100] = [-1; 1]$	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 3

Din inegalitatea Cauchy – Buniakowsky avem :	3 p
$(t+u) \left(\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{u} \right) \geq (x+y)^2$	
Sau pentru $t+u > 0$, obținem : $\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{u} \geq \frac{(x+y)^2}{t+u}$	1 p
Folosind această inegalitate avem :	3 p
$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{2^2}{1+ab+1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{3^2}{3+ab+bc+ac} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = 1$	
TOTAL	7 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18 februarie 2012
Clasa a - IX – a
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 4



Construim pe dreapta BC , în același semiplan cu C față de AB , punctul D astfel ca $m(\angle BAD) = 60^\circ$. Atunci triunghiul ABC este echilateral și avem $AD = BD = AB = 1$	1 p
Fie E mijlocul lui (BD) . $BE = ED = \frac{1}{2}$; $AE \perp BD$ și $m(\angle BAE) = m(\angle DAE) = 30^\circ \Rightarrow$ (AC este bisectoarea unghiului BAE).	1 p
Din teorema bisectoarei , avem $\frac{BC}{CE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{BC + CE} = \frac{AB}{AB + AE}$	1p
Cum $AE = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2 - \sqrt{3}$	1p
Cum $CE = BE - BC \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$	1p

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ACE, obținem $AC = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}$	2p
TOTAL	7p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - X - a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

$(2^x)^2 + (3^x)^2 + (-5^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 3^x \cdot 5^x$	2 p
$(2^x + 3^x - 5^x)^2 = 0 \Rightarrow 2^x + 3^x - 5^x = 0$	2 p
$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ are soluție unică	2 p
$x = 1$	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 2

$x^2 + 2 \geq 2 ; \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$	1 p
$ x + 1 \geq 1 ; \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) \leq \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$	1 p
Avem $(x^2 + 2)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3^{\frac{\log_1(x^2+2)}{2}}$	1 p
Funcția 3^x este strict crescătoare și $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2) \leq -1$, rezultă $3^{\frac{\log_1(x^2+2)}{2}} \leq 3^{-1} = \frac{1}{3}$	2 p
Deci : $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) + (x^2 + 1) + (x^2 + 2)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} \leq -1 + 0 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} < 0$	1 p
În concluzie , ecuația dată nu are soluții	1 p
TOTAL	7 p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ**

18 februarie 2012

Clasa a - X - a

BAREM DE CORECTARE**SUBIECTUL 3**

Fie $S = (x_{2n} + x_{8n})(x_{3n} + x_{5n}) = (a^{2n} + b^{2n} + a^{8n} + b^{8n}) \cdot (a^{3n} + b^{3n} + a^{5n} + b^{5n})$ și $D = (x_n + x_{7n})(x_{4n} + x_{6n}) = (a^n + b^n + a^{7n} + b^{7n}) \cdot (a^{4n} + b^{4n} + a^{6n} + b^{6n})$	1p
Efectuând calculele se obține :	
$S = a^{5n} + b^{5n} + a^{7n} + b^{7n} + a^{11n} + b^{11n} + a^{13n} + b^{13n} + (ab)^{2n}(b^{3n} + a^n + a^{3n} + b^n) + (ab)^{3n}(a^{5n} + b^{5n}) + (ab)^{5n}(a^{3n} + b^{3n})$	1p
$D = a^{5n} + b^{5n} + a^{7n} + b^{7n} + a^{11n} + b^{11n} + a^{13n} + b^{13n} + (ab)^n(b^{3n} + b^{5n} + a^{3n} + a^{5n}) + (ab)^{4n}(a^{3n} + b^{3n}) + (ab)^{6n}(a^n + b^n)$	1p
Dacă $ab=1$, atunci $S=D = a^n + b^n + a^{7n} + b^{7n} + a^{11n} + b^{11n} + a^{13n} + b^{13n} + 2(a^{3n} + b^{3n}) + 2(a^{5n} + b^{5n})$	1p
Dacă $ab = -1$ și $n = 2k$, atunci $S = D = a^n + b^n + a^{7n} + b^{7n} + a^{11n} + b^{11n} + a^{13n} + b^{13n} + 2(a^{3n} + b^{3n}) + 2(a^{5n} + b^{5n})$	1p
Dacă $ab = -1$ și $n = 2k + 1$, atunci $S = D = a^n + b^n + a^{7n} + b^{7n} + a^{11n} + b^{11n} + a^{13n} + b^{13n}$	2p
TOTAL	7p

SUBIECTUL 4

Din ipoteză avem relația : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$	1p
Funcția $\ln : R_+ \rightarrow R$ este concavă , deci : $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$ unde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$	2p
Luăm : $\lambda_1 = \frac{a}{a+b+c}$; $\lambda_2 = \frac{b}{a+b+c}$; $\lambda_3 = \frac{c}{a+b+c}$ și $x_1 = a$; $x_2 = b$; $x_3 = c$	2p
Obținem : $\frac{a}{a+b+c} \ln a + \frac{b}{a+b+c} \ln b + \frac{c}{a+b+c} \ln c \leq \ln \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c}$	1p
Deci : $a \ln a + b \ln b + c \ln c + (a + b + c) \ln(a + b + c) \leq 0$	1p
TOTAL	7p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
18 februarie 2012
Clasa a - XI - a
BAREM DE CORECTARE**

SUBIECTUL 1

$\det(A^{2012}) = (\det A)^{2012} \Rightarrow \det(A) = 0$	2 p
$A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow$ $A^2 = \text{Tr}(A) \cdot A$	2 p
$A^{2012} = [\text{Tr}(A)]^{2011} \cdot A \Rightarrow$ $A = O_2$ sau $\text{Tr}(A) = 0$	2 p
În ambele cazuri $A^{2011} = O_2$	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 2

Fie polinomul de gradul al doilea : $f(x) = \det((A+B) + x(A-B)) = x^2 \det(A-B) + mx + \det(A+B)$	1 p
Avem : $0 = \det(A^2 + B^2) = \det\left[\frac{1}{2}((A+B)^2 + (A-B)^2)\right] = \frac{1}{4} \det((A+B)^2 + (A-B)^2) =$ $\frac{1}{4} \det[(A+B) + i(A-B)] \det[(A+B) - i(A-B)]$	3 p
Rezultă $f(i) = f(-i) = 0 \Rightarrow f(x) = a(x^2 + 1)$	1 p
Deci , $\det(A+B) = \det(A-B)$	1 p
Dar , $\det(A+B) + \det(A-B) = 2 \cdot \det A + 2 \cdot \det B$ și în final $\det(A+B) = \det A + \det B$	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 3

Înlocuind „formal” pe n cu ∞ , condițiile problemei sunt îndeplinite atunci când $a + b = 1$	1 p
Atunci : $\lim_{n \rightarrow \infty} (a\sqrt[n]{n} + b)^{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a\sqrt[n]{n} + 1 - a - 1)^{\frac{1}{\ln n}} =$	2 p
$= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + a(\sqrt[n]{n} - 1)]^{\frac{1}{a(\sqrt[n]{n} - 1)} \cdot \frac{an(\sqrt[n]{n} - 1)}{\ln n}} =$	1 p
$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt[n]{n} - 1)}{\ln \sqrt[n]{n}}} =$	1 p



$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln(1+\sqrt[n]{n}-1)}} = e^a$	2 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 4

a) Se scrie $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$	1 p
Se obține $a_n = f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n) = \frac{1^3}{2^2} \cdot \frac{2^3}{3^2} \cdot \frac{3^3}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^3}{(n+1)^2} = \frac{n!}{(n+1)^2}$	2 p
b) $\frac{1}{(k+1)a_k} = \frac{k+1}{k!} = \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!}$, $k \geq 1$. Prin însumare se obține $\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{3a_2} + \dots + \frac{1}{(n+1)a_n} = x_n + y_n$; unde $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ și $y_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}$	2 p
Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e - 1$	1 p
Obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{3a_2} + \dots + \frac{1}{(n+1)a_n} \right) = 2e - 1$	1 p
TOTAL	7 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ

18 februarie 2012

Clasa a - XII – a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

Cum $641 = 640 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1$ și	1 p
$641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4$ rezulta ca	1 p
$5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$ și $2^4 \equiv -5^4 \pmod{641}$	2 p
Din prima congruență rezulta $5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ care înmulțită cu a doua da	1 p
$5^4 \cdot 2^{32} \equiv -5^4 \pmod{641}$,	1 p
de unde $2^{32} \equiv -1 \pmod{641}$.	1 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 2

a) Verificarea faptului că legea este o lege internă pe G	1 p
Verificarea axiomelor grupului ; $e = 0$ și $x' = -x$	2 p
b) Verificarea faptului că f este morfism	1 p
Verificarea faptului că f este bijectivă	1 p
c) Presupunem prin absurd că $(G ; *) \approx (R^* ; \cdot)$. Cum $(G ; *) \approx (R ; +)$ ar rezulta că $(R ; +) \approx (R^* ; \cdot)$ ceea ce este o contradicție , deoarece : în $(R^* ; \cdot)$ elementul -1 are ordinul 2 , căci $(-1)^2 = 1$ și $-1 \neq 1$, în timp ce în grupul $(R ; +)$ nu avem elemente de ordinul 2 , căci $x+x = 0$,adică $x = 0$, care are ordinul 1	2 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 3

Notăm $t = nax$; $dt = na dx$	2 p
$x = 0 \Rightarrow t = 0$ $x = 1 \Rightarrow t = na$	1 p
Atunci avem : $\int_0^1 f(nax)dx = \int_0^{na} f(t) \frac{dt}{na} = \frac{1}{na} \int_0^{na} f(t)dt$	2 p

Să considerăm $G: R^* \rightarrow R$, $G(a) = \int_0^{na} f(t)dt \equiv 0$ este o primitivă a lui f . Deci f este identic nulă	2 p
TOTAL	7 p

SUBIECTUL 4

Notăm $\sqrt{x} = t \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2t dt$. Pentru $x = 0$ avem $t = 0$; iar pentru $x = \frac{\pi^2}{4}$ avem $t = \frac{\pi}{2}$	1 p
Atunci : $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t dt}{1 + \sin t + \cos t}$. Notând $y = \frac{\pi}{2} - t$, avem $dy = - dt$. Pentru $t = 0$ avem $y = \frac{\pi}{2}$; iar pentru $t = \frac{\pi}{2}$ avem $y = 0$	1 p
$I = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\frac{\pi}{2} - y}{1 + \cos y + \sin y} (-dy) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \cos y + \sin y} dy - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{1 + \cos y + \sin y} dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1 + \cos y + \sin y} - I$	2 p
Avem, $I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}{2 + 2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}} dy$	2 p
Notăm $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = u$; $du = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} \right) dy$. Pentru $y = 0$ avem $u = 0$; iar pentru $y = \frac{\pi}{2}$ avem $u = 1$. Atunci, $I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{du}{1 + u} = \frac{\pi}{2} \ln 2$	1 p
TOTAL	7 p