INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A 9 - A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ şi mulţimile

$$A = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap M\ ,\ B = \{3x+2 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap M\ ,\ C = \{5x+4 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap M\ .$$

a) Determinaţi numărul elementelor mulţimilor A, B şi C.

b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A \cap B \cap C$.

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$ se consideră numărul

$$E(n) = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \sqrt{\frac{1}{(n-2)^2} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + 1}}}}_{n-1 \text{ radicali}}\ .$$

Arătaţi că partea întreagă a numărului $nE(n)$ este n, pentru orice $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

3. Pe laturile $(AB), (BC), (CA)$ ale triunghiului ABC se iau punctele M, N, respectiv P astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA} = k\,.$$

a) Arătaţi că $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

b) Arătaţi că $AN + BP + CM < AB + BC + CA$.

4. Numerele reale x, y, z, t verifică relaţiile $x + y + z + t = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Arătaţi că

$$-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0\,.$$

Problema 3 a fost selectată din nr. 12/2011 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice din România

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A 9 - A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1 (*M. Perianu*)
Se consideră mulţimile $M=\{1,2,3,\dots,2012\}$, $A=\left\{2x+1 \mid x\in\mathbb{N}\right\}\cap M$, $B=\left\{3x+2 \mid x\in\mathbb{N}\right\}\cap M$, $C=\left\{5x+4 \mid x\in\mathbb{N}\right\}\cap M$.

a) Determinaţi numărul elementelor mulţimilor A, B şi C.
b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A\cap B\cap C$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $A=\left\{2x+1 \mid 0\le x\le 1005\right\}$ are 1006 elemente	**2 puncte**
$B=\left\{3x+2 \mid 0\le x\le 670\right\}$ are 671 elemente	**2 puncte**
$C=\left\{5x+4 \mid 0\le x\le 401\right\}$ are 402 elemente	**2 puncte**
b) $n\in A\cap B\cap C$ dacă şi numai dacă $n+1$ este divizibil cu $2\cdot 3\cdot 5$ şi $n\le 2012$	**2 puncte**
$A\cap B\cap C=\{30x-1 \mid 1\le x\le 67\}$ are 67 de elemente	**2 puncte**

Subiectul 2 (*F. Dumitrel*)
Pentru fiecare număr natural $n\ge 2$ se consideră numărul

$$E(n)=\underbrace{\sqrt{\frac{1}{(n-1)^2}+\sqrt{\frac{1}{(n-2)^2}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{1^2}+1}}}}_{n-1 \text{ radicali}}.$$

Arătaţi că partea întreagă a numărului $nE(n)$ este *n*, pentru orice $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Trebuie să arătăm că $n\le nE(n)<n+1$	**2 puncte**
Pentru prima inegalitate observăm că sub fiecare radical se află un număr ≥ 1	**2 puncte**
Pentru a doua inegalitate, arătăm inductiv că $E(n)<1+1/n$ pentru $n\ge 2$	**2 puncte**
Într-adevăr, $E(2)=\sqrt{2}<1+1/2$, iar dacă $E(n)<1+1/n$, atunci $E(n+1)=\sqrt{1/n^2+E(n)}<\sqrt{1/n^2+1/n+1}<1+1/(n+1)$	**4 puncte**

Subiectul 3 (*M.* şi *S. Monea*)

Pe laturile $(AB),(BC),(CA)$ ale triunghiului ABC se iau punctele M,N, respectiv P astfel încât

$$\frac{MA}{MB}=\frac{NB}{NC}=\frac{PC}{PA}=k.$$

a) Arătaţi că $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

b) Arătaţi că $AN+BP+CM<AB+BC+CA$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$ şi analoagele (1)	**3 puncte**
Rezultă $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\frac{1}{k+1}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\frac{k}{k+1}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=\vec{0}$	**2 puncte**
b) Din (1), $AN<\frac{1}{k+1}AB+\frac{k}{k+1}AC$ şi analoagele	**3 puncte**
Prin adunare obţinem concluzia	**2 puncte**

Subiectul 4 (***)

Numerele reale x,y,z,t verifică relaţiile $x+y+z+t=0$ şi $x^2+y^2+z^2+t^2=1$. Arătaţi că

$$-1\le xy+yz+zt+tx\le 0.$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Concluzia este $-1\le(x+z)(y+t)\le 0$	**2 puncte**
A doua inegalitate rezultă din $y+t=-(x+z)$ (1)	**2 puncte**
$(x+z)^2+(y+t)^2\le 2(x^2+z^2)+2(y^2+t^2)=2$	**3 puncte**
Utilizând (1) rezultă $2(x+z)^2\le 2$, de unde $-(y+t)(x+z)=(x+z)^2\le 1$, deci $(x+z)(y+t)\ge -1$.	**3 puncte**