



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A 10 – A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale pozitive, ecuația

$$x^{x^{10}} = 10.$$

2. Fie  $x$  un număr real și  $a, b, c \in (0, \infty)$  astfel încât  $a^x + b^x + c^x = a^{x+1}b^{x+1}c^{x+1}$ . Arătați că

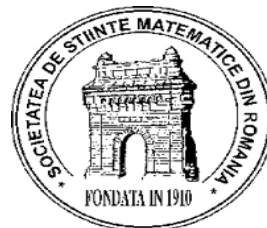
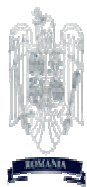
$$a^{2x+3} + b^{2x+3} + c^{2x+3} \geq 9$$

3. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea că  $f((f(x))^3) = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Arătați că funcția  $f$  este bijectivă și că  $f(f(x)) = \sqrt[3]{x}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

4. Se consideră numerele complexe  $z_1, z_2, \dots, z_{100}$  cu proprietatea că  $z_k \cdot z_{k+1} - 2z_k + 4 = 0$ , pentru orice  $k \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ .

a) Arătați că  $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{99}$  este număr întreg negativ.

b) Calculați suma  $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{4 + 2|z_k| + |z_k z_{k+1}|}$ .



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A 10 – A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1 (M. Perianu)**

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale pozitive, ecuația  $x^{x^{10}} = 10$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Logaritmând în baza 10, obținem $x^{10} \cdot \lg x = 1$ , de unde rezultă că $\lg x > 0$ , adică $x > 1$ .	<b>3 puncte</b>
Observăm că $\sqrt[10]{10}$ este soluție	<b>3 puncte</b>
Deoarece funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^{10} \lg x$ este strict crescătoare, aceasta este unica soluție	<b>4 puncte</b>

**Subiectul 2 (M. Chirciu)**

Fie  $x$  un număr real și  $a, b, c \in (0, \infty)$  astfel încât  $a^x + b^x + c^x = a^{x+1}b^{x+1}c^{x+1}$ . Arătați că

$$a^{2x+3} + b^{2x+3} + c^{2x+3} \geq 9.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Știm că $a^x + b^x + c^x \geq 3a^{x/3}b^{x/3}c^{x/3}$	<b>3 puncte</b>
Din ipoteză rezultă $a^{2x/3+1}b^{2x/3+1}c^{2x/3+1} \geq 3$	<b>4 puncte</b>
Astfel, $a^{2x+3} + b^{2x+3} + c^{2x+3} \geq 3a^{2x/3+1}b^{2x/3+1}c^{2x/3+1} \geq 9$	<b>3 puncte</b>

**Subiectul 3 (\*\*\*)**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea că  $f((f(x))^3) = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Arătați că funcția  $f$  este bijectivă și că  $f(f(x)) = \sqrt[3]{x}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $f(x_1) = f(x_2)$ , atunci $x_1 = f((f(x_1))^3) = f((f(x_2))^3) = x_2$ , deci $f$ este injectivă	<b>3 puncte</b>
Pentru $y \in \mathbb{R}$ , luând $x = (f(y))^3$ obținem $f(x) = y$ , deci $f$ este surjectivă	<b>3 puncte</b>
Apoi $f((f(f(x)))^3) = f(x)$ implică $(f(f(x)))^3 = x$ , de unde $f(f(x)) = \sqrt[3]{x}$ .	<b>4 puncte</b>

**Subiectul 4 (M. Perianu)**

Se consideră numerele complexe  $z_1, z_2, \dots, z_{100}$  cu proprietatea că  $z_k \cdot z_{k+1} - 2z_k + 4 = 0$ , pentru orice  $k \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ .

a) Arătați că  $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{99}$  este număr întreg negativ.

b) Calculați suma  $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{4 + 2|z_k| + |z_k z_{k+1}|}$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $z_{k+1} = \frac{2z_k - 4}{z_k}$ , pentru orice $k = \overline{1, 99}$ .	1 punct
Obținem $z_{k+2} = -\frac{4}{z_k - 2}$ , $k = \overline{1, 98}$ și $z_{k+3} = z_k$ , $k = \overline{1, 97}$	2 puncte
$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{99} = (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)^{33} = \left( z_1 \cdot \frac{2z_1 - 4}{z_1} \cdot \frac{-4}{z_1 - 2} \right)^{33} = -8^{33} = \text{întreg negativ}$	2 puncte
b) $S = 33 \left( \frac{1}{4 + 2 z_1  +  z_1 z_2 } + \frac{1}{4 + 2 z_2  +  z_2 z_3 } + \frac{1}{4 + 2 z_3  +  z_3 z_1 } \right)$	2 puncte
$S = 33 \left( \frac{1}{4 + 2 z_1  +  z_1 z_2 } + \frac{ z_1 }{4 z_1  + 2 z_1 z_2  + 8} + \frac{ z_1 z_2 }{4 z_1 z_2  + 16 + 8 z_1 } \right) =$ $= \frac{33}{4 + 2 z_1  +  z_1 z_2 } \left( 1 + \frac{ z_1 }{2} + \frac{ z_1 z_2 }{4} \right) = \frac{33}{4}$ .	3 puncte