

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -****CLASA A 11 – A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. a) Fie a un număr real. Arătați că, pentru orice număr natural $n > |a|$,

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \geq 1 + a.$$

b) Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

2. a) Arătați că există două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel ca, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\det(xA + yB) = x^2 + y^2.$$

b) Arătați că nu există matricele $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ astfel ca, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\det(xA + yB + zC) = x^2 + y^2 + z^2.$$

3. a) Justificați afirmația: „Pentru orice $x \in (0, \infty)$, $\sin x < x$ ”.

b) Fie $a \in [0, 1]$ și $(x_n)_{n \geq 1}$ șirul definit prin

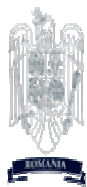
$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătați că șirul este convergent și determinați-i limita.

4. Fie $n \geq 2$ un număr natural și $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice nenulă, cu $\det A = 0$. Demonstrați că:

$$A + A^* = \operatorname{tr}(A)I_n \text{ dacă și numai dacă } n = 2.$$

($\operatorname{tr}(A)$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A)



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A 11 - A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Subiectul 1 (*)**

a) Fie a un număr real. Arătați că, pentru orice număr natural $n > |a|$, $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \geq 1 + a$.

b) Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>a) Fie $b = a/n$. Atunci $1 + b > 0$ și, inductiv, $(1 + b)^k \geq 1 + kb, \forall k \in \mathbb{N}^*$, deci</p> $(1 + a/n)^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb = 1 + a$ <p><i>Observații.</i></p> <p>1) Pentru punctajul maxim, este suficient să se observe că este vorba de inegalitatea lui Bernoulli.</p> <p>2) Pentru un raționament care funcționează doar în cazul $a \geq 0$ se vor acorda 2 puncte</p>	4 puncte
b) Observăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	3 puncte
Deoarece $(1 + x/n)^n \geq 1 + x$ pentru $n > x $, deducem concluzia	3 puncte

Subiectul 2 (N. Bourbăcuț)

a) Arătați că există două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel ca, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\det(xA + yB) = x^2 + y^2.$$

b) Arătați că nu există matricele $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ astfel ca, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\det(xA + yB + zC) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Putem alege, de exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	4 puncte
b) $xA + yB + zC = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 + zc_1 & xa_2 + yb_2 + zc_2 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	2 puncte
Cum sistemul $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$ are o soluție nebanală (x_0, y_0, z_0) , existența matricelor ar duce la contradicția $0 = \det(xA + yB + zC) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$	4 puncte

Subiectul 3 (N. Bourbăcuț)

a) Justificați afirmația: „Pentru orice $x \in (0, \infty)$, $\sin x < x$ ”.

b) Fie $a \in [0,1]$ și $(x_n)_{n \geq 1}$ șirul definit prin $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că șirul este convergent și determinați-i limita.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $x > 1$, proprietatea este evidentă	1 punct
Dacă $x \in (0,1]$, atunci $\sin x/2$ este aria unui triunghi „înscris” într-un sector de cerc având aria $x/2$	2 puncte
b) Folosim faptul că un șir monoton și mărginit este convergent	1 punct
Mărginirea rezultă din $-1 \leq \sin t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$	1 punct
Monotonia rezultă inductiv, deoarece $x_1 \in [0,1]$ implică $x_2 = \sin x_1 \in [0,1]$ și $x_2 \leq x_1$, iar $0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1 \leq 1$ implică $0 \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \leq 1$, de unde $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 1$	3 puncte
Dacă $(x_n)_n \rightarrow l$, atunci $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)_n \rightarrow l$, deci $\sin l = l$, de unde $l = 0$	2 puncte

Subiectul 4 (N. Bourbăcuț)

Fie $n \geq 2$ un număr natural și $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice nenulă, cu $\det A = 0$. Demonstrați că:

$$A + A^* = \text{tr}(A)I_n \text{ dacă și numai dacă } n = 2.$$

($\text{tr}(A)$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A).

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $n = 2$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $A + A^* = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (a+d)I_2$	4 puncte
Reciproc, dacă $A + A^* = \text{tr}(A)I_n$, atunci $AA^* + (A^*)^2 = \text{tr}(A)A^*$, deci $(A^*)^2 = \text{tr}(A)A^*$ <i>Observație.</i> Cele două puncte se acordă și doar pentru afirmația $AA^* = (\det A)I_n = 0_n$	2 puncte
Apoi $A \neq 0_n$ și $\det A = 0$, deci $A^* \neq 0_n$, de unde $\text{rang } A = n-1$. Cum $AA^* = 0_n$ și $\text{rang}(AA^*) \geq \text{rang } A + \text{rang } A^* - n$, deducem $\text{rang } A^* = 1$	2 puncte
Astfel $(A^*)^2 = \text{tr}(A^*)A^*$, deci $\text{tr}(A^*) = \text{tr}(A)$. Din ipoteză reiese $\text{tr}(A) + \text{tr}(A^*) = n \text{tr}(A)$, de unde $n = 2$	2 puncte