**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A 12 – A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.**
**Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

**1.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care este de două ori derivabilă și are proprietățile:

$$f(0)=0, f'(0)=1 \text{ și } f''(x)+2f'(x)+f(x)\geq 0 \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=e^x f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este convexă și $f(x)\geq xe^{-x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^n f(x)dx \geq \frac{(n+1)!}{e}\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{(n+1)!}\right)$.

**2.** a) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $x^3=a^2$, unde $a\in\mathbb{Z}_5$.

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $(G,\cdot)$ un grup cu $3n+1$ elemente. Arătaţi că, pentru orice $a\in G$, ecuaţia $x^3=a^2$ are exact o soluţie.

**3.** Dacă $(G,\cdot)$ este un grup finit cu elementul neutru $e$ şi $p$ este un număr natural nenul, notăm $G_p=\{x\in G \mid x^p=e\}$.

a) Arătaţi că, dacă $p$ este impar, atunci $G_p$ are un număr impar de elemente.

b) Arătaţi că nu există un grup $(G,\cdot)$ astfel încât $G_2$ să aibă 3 elemente, dar există un grup $(G,\cdot)$ astfel încât $G_2$ să aibă 4 elemente.

**4.** Fie $m\in(0;1)$. Vom spune că o funcţie $f:[0;1]\to[0;1]$ *are media m* dacă este integrabilă şi

$$\int_0^1 f(x)dx=m.$$

a) Arătaţi că mulţimea funcţiilor care au media *m* este infinită.

b) Arătaţi că, dacă $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare şi *f* este o funcţie cu media *m*, atunci

$$\int_0^m g(x)dx\leq\int_0^1 f(x)g(x)dx\leq\int_{1-m}^1 g(x)dx.$$

Problema 2 a fost selectată din nr. 12/2011 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice din România

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A 12 – A**
**SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1** (*N. Bourbăcuț*)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care este de două ori derivabilă şi are proprietăţile:

$$f(0)=0, f'(0)=1 \text{ şi } f''(x)+2f'(x)+f(x)\geq 0 \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=e^x f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este convexă şi $f(x)\geq xe^{-x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^n f(x)dx \geq \frac{(n+1)!}{e}\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{(n+1)!}\right)$.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| a) $F''(x)=(f''(x)+2f'(x)+f(x))e^x\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, deci $F$ este convexă | **3 puncte** |
| Pentru $g(x)=e^x f(x)-x$, $g''=F''\geq 0$, deci $g'$ este crescătoare | **1 punct** |
| Din $g'(0)=e^0(f(0)+f'(0))-1=0$ deducem că $g'\geq 0$ pe $[0;\infty)$ şi $g'\leq 0$ pe $(-\infty;0]$, deci 0 este punct de minim al funcţiei $g$, iar valoarea minimă este $g(0)=0$ | **2 puncte** |
| b) $\int_0^1 x^n f(x)dx \geq \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ | **1 punct** |
| $\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=\frac{(n+1)!}{e}\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{(n+1)!}\right)$ | **3 puncte** |

**Subiectul 2** (*C. Chiteş* şi *B. Năstăsescu*)

a) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $x^3=a^2$, unde $a\in\mathbb{Z}_5$.

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $(G,\cdot)$ un grup cu $3n+1$ elemente. Arătaţi că, pentru orice $a\in G$, ecuația $x^3=a^2$ are exact o soluție.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| Dacă $a=\hat{0}$, atunci $x=\hat{0}$ este unica soluție | **1 punct** |
| Dacă $a\neq\hat{0}$, atunci ecuația are soluția $a^2$ | **2 puncte** |
| Apoi, dacă $x^3=y^3$ atunci $x=x^6=y^6=y$, deci soluţia este unică | **2 puncte** |
| b) O soluţie a ecuaţiei este $a^{n+1}$, pentru că $(a^{n+1})^3=a^{3n+1}a^2=a^2$ | **2 puncte** |
| Dacă $x,y$ sunt soluţii ale ecuației şi $e$ este elementul neutru al grupului, atunci $e=x^{3n+1}=a^{2n}x$ şi $e=y^{3n+1}=a^{2n}y$, de unde $x=y$ | **3 puncte** |

**Subiectul 3** ( ***)
Dacă $(G,\cdot)$ este un grup finit cu elementul neutru *e* şi *p* este un număr natural nenul, notăm

$$G_p = \{x \in G \mid x^p = e\}.$$

a) Arătaţi că, dacă *p* este impar, atunci $G_p$ are un număr impar de elemente.

b) Arătaţi că nu există un grup $(G,\cdot)$ astfel încât $G_2$ să aibă 3 elemente, dar există un grup $(G,\cdot)$ astfel încât $G_2$ să aibă 4 elemente.

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| a) Observăm că $e \in G_p$ | **2 puncte** |
| Apoi, dacă $x \in G_p$, atunci $x^{-1} \in G_p$ | **2 puncte** |
| Dacă $x \in G_p$ şi $x = x^{-1}$, atunci $x^2 = e$, de unde $x = x^{p+1} = e$, deci $G_p$ este o reuniune a lui $\{e\}$ cu mulţimi disjuncte, de forma $\{x, x^{-1}\}, x \neq e$ | **2 puncte** |
| b) Dacă $G_2 = \{e,a,b\}$ şi $ab = ba$, atunci $ab \in G_2$ şi $ab \neq e,a,b$ – contradicţie –, iar dacă $ab \neq ba$, atunci $aba \in G_2$ şi $aba \neq e,a,b$ – contradicţie | **2 puncte** |
| Exemple pentru care $G_2$ are 4 elemente sunt grupul lui Klein sau grupul simetric $S_3$ | **2 puncte** |

**Subiectul 4** ( *N. Bourbăcuţ*)
Fie $m \in (0;1)$. Vom spune că o funcţie $f:[0;1] \to [0;1]$ *are media m* dacă este integrabilă şi

$$\int_0^1 f(x)dx = m.$$

a) Arătaţi că mulţimea funcţiilor care au media *m* este infinită.
b) Arătaţi că, dacă $g:[0;1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare şi *f* este o funcţie cu media *m*, atunci

$$\int_0^m g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \int_{1-m}^1 g(x)dx$$

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| a) Funcțiile de forma $f(x) = m + a(x - 1/2)$, unde $\lvert a \rvert \leq 2\min(m, 1-m)$, au media *m* | **3 puncte** |
| b) Prima inegalitate se scrie $\int_0^m g(x)(1-f(x))dx \leq \int_m^1 g(x)f(x)dx$ | **3 puncte** |
| Din ipoteză $f(x) \geq 0$ şi $g(x) \geq g(m)$ pe $[m;1]$, deci $\int_m^1 g(x)f(x)dx \geq g(m)\int_m^1 f(x)dx$; analog $\int_0^m g(x)(1-f(x))dx \leq g(m)\int_0^m (1-f(x))dx = g(m)\left(m - \int_0^m f(x)dx\right) = g(m)\int_m^1 f(x)dx$, ceea ce demonstrează prima relaţie | **3 puncte** |
| A doua inegalitate se demonstrează analog. | **1 punct** |
| *Observaţie*. În cazul în care se demonstrează a doua inegalitate dar nu şi prima, se vor acorda la punctul b) **6 puncte din cele 7.** | **-** |