INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A VI-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. Aflați numerele naturale de trei cifre care prin împărțire la 7 dau restul 1, prin împărțire la 8 dau restul 4 şi prin împărțire la 9 dau restul 7.

2. **a)** Dați exemplu de un număr rațional mai mare decât $\frac{2011}{2012}$ şi mai mic decât $\frac{2012}{2013}$. Justificați răspunsul.

b) Calculați suma tuturor numerelor raționale de forma $r=\frac{n}{990}, n\in\mathbb{N}$, cu proprietatea că $0,(97)<r<0,99$.

3. Se consideră mulțimea P a pătratelor perfecte. Determinați cel mai mic număr de elemente care trebuie extrase din mulțimea P astfel încât, printre numerele extrase, să existe cu siguranță două care să aibă suma sau diferența divizibilă cu 10.

4. Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N} \,\middle|\, x=5k \text{ sau } x=5k+1, k\in\mathbb{N}^*\right\}$.

a) Arătați că, dacă $a\in A$, atunci $a^n\in A$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Pentru fiecare număr natural m, $m\geq 2$, determinați numărul de elemente al mulțimii $P_m=\left\{p\in A \,\middle|\, p^m\leq 2012\right\}$.

Problema 1 a fost selectată din nr. 1/2011 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicație lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiințe Matematice din România

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A VI-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Aflaţi numerele naturale de trei cifre care prin împărţire la 7 dau restul 1, prin împărţire la 8 dau restul 4 şi prin împărţire la 9 dau restul 7.

GAZETA MATEMATICĂ 1 /2011

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $n=\overline{abc}$ numerele cu proprietatea din enunţ. În baza ipotezei obţinem: $n=7c_1+1$, $n=8c_2+4$ şi $n=9c_3+7$.	**3 p**
Adunăm 20 în fiecare membru în relaţiile de mai sus, obţinem: $n+20=7c_1+21=7(c_1+3)$, deci $7\mid n+20$; $n+20=8c_2+24=8(c_1+3)$, deci $8\mid n+20$ şi $n+20=9c_3+27=9(c_3+3)$, deci $9\mid n+20$.	**3 p**
Aşadar cel mai mic multiplu comun al numerelor 7, 8 şi 9, adică 504, este un divizor al numărului $n+20$; deci $n+20\in\{508\cdot k \mid k\in\mathbb{N}\}$.	**2 p**
Cum numărul n are trei cifre, rezultă că $n+20=504$ sau $n+20=1008$, de unde $n\in\{484,988\}$.	**2 p**

Subiectul 2.

a) Daţi exemplu de un număr raţional mai mare decât $\frac{2011}{2012}$ şi mai mic decât $\frac{2012}{2013}$. Justificaţi răspunsul.

b) Calculaţi suma tuturor numerelor raţionale de forma $r=\frac{n}{990}, n\in\mathbb{N}$, cu proprietatea că $0,(97)<r<0,99$.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Un exemplu este media aritmetică a numerelor raţionale x şi y, unde $x=\frac{2011}{2012}$ şi $y=\frac{2012}{2013}$, care este, la rândul ei un număr raţional.	**2 p**
b) Avem $\frac{97}{99}<\frac{n}{990}<\frac{99}{100}$	**2 p**

Aducând la acelaşi numitor, obținem $\frac{9700}{9900}<\frac{10n}{9900}<\frac{9801}{9900}$	**2 p**
Rezultă că $970<10n\le 980$, deci $n\in\{971,972,...,980\}$	**1 p**
Aşadar $r\in\left\{\frac{971}{990},\frac{972}{990},...,\frac{980}{990}\right\}$	**1 p**
Suma numerelor este egală cu $\frac{1951}{198}$	**2 p**

Subiectul 3. Se consideră mulțimea P a pătratelor perfecte. Determinați cel mai mic număr de elemente care trebuie extrase din mulțimea P astfel încât, printre numerele extrase, să existe cu siguranță două care să aibă suma sau diferența divizibilă cu 10.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Vom arăta că numărul cerut este egal cu 5. Pentru $n\in\mathbb{N}$ avem: $u\left(n^2\right)\in A=\{0,1,4,5,6,9\}$.	**4 p**
Nu sunt suficiente numai 4 bile extrase deoarece putem obține terminațiile: 1, 4, 5, 0	**3p**
Se demonstrează că $n=5$ verifică concluzia.	**3 p**

Subiectul 4. Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\, x=5k \text{ sau } x=5k+1, k\in\mathbb{N}^*\right\}$.

a) Arătați că, dacă $a\in A$, atunci $a^n\in A$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Pentru fiecare număr natural m, $m\ge 2$, determinați numărul de elemente al mulțimii $P_m=\left\{p\in A\,\middle|\, p^m\le 2012\right\}$.

prof. Lucian Petrescu, Tulcea, Mircea Fianu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Avem $a\in A$ dacă şi numai dacă $a\ne 0$ şi $u(a)\in\{0;1;5;6\}$.	**2 p**
Deoarece pentru $u(a)\in\{0;1;5;6\}$, rezultă $u\left(a^n\right)=\left[u(a)\right]^n\in\{0;1;5;6\}$, oricare $n\in\mathbb{N}^*$.	**1 p**
Deducem că $a^n\in A$, oricare $n\in\mathbb{N}^*$.	**1 p**
b) Pentru $m\in\mathbb{N}$, $m\ge 5$ şi $p\in A$. Rezultă că $p^m\ge 5^5>2012$. Prin urmare, $P_m=\varnothing$, oricare $m\in\mathbb{N}$, $m\ge 5$.	**1 p**
Considerăm $m=4$ şi $p\in A$. Cum $10^4 1000>2012$, elementele care verifică sunt $p=5$ şi $p=6$, deci $P_4=\{5;6\}$ care are două elemente.	**1 p**
Considerăm $m=3$ şi $p\in A$. Dacă $p\ge 13$, atunci $p^3\ge 13^3>2012$	**1 p**
Rezultă că $P_3=\{5;6;10;11\}$ care are 4 elemente	**1p**
Considerăm $m=2$ şi $p\in A$. Dacă $p\ge 45$, atunci $p^2\ge 45^2>2012$	**1p**
Rezultă că $P_2=\{5;6;10;11;15;16;20;21;25;26;30;31;35;36;40;41\}$ care are 16 elemente.	**1p**