INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A VII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. a) Demonstraţi că, oricare ar fi numerele naturale nenule a, b cu $a < b$, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq \frac{1}{ab}.$$

b) Considerăm primele zece numere naturale prime luate în ordine strict crescătoare, $p_1, p_2, ..., p_{10}$. Demonstraţi că $\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_2 p_3} + \frac{1}{p_3 p_4} + ... + \frac{1}{p_9 p_{10}} < \frac{14}{29}$.

2. Considerăm pătratul $ABCD$ şi punctele $E \in (BC)$, $F \in (DC)$. Dacă $m(\sphericalangle BAE) = 15^\circ$ şi $m(\sphericalangle DAF) = 30^\circ$, determinaţi $m(\sphericalangle AEF)$.

3. a) Dacă x şi y sunt numere raţionale cu proprietatea că $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$, demonstraţi că $x = y = 0$.

b) Determinaţi toate perechile de numere raţionale $(a; b)$ care verifică egalitatea

$$\sqrt{2(a+1)^2} - 2\sqrt{2} = |b+1| \cdot \sqrt{3} - \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right|.$$

4. În rombul $ABCD$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBD}$ şi dreapta DC sunt concurente în E.

a) Determinaţi măsura unghiului $\widehat{AEB}$;

b) Aflaţi măsurile unghiurilor rombului.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A VII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1. a) Demonstraţi că, oricare ar fi numerele naturale nenule a,b cu $a<b$, are loc inegalitatea $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geq\frac{1}{ab}$.

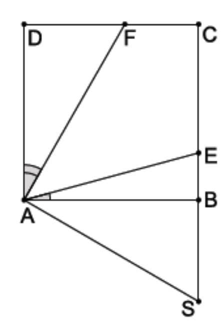
b) Considerăm primele zece numere naturale prime luate în ordine strict crescătoare, $p_1, p_2, ..., p_{10}$. Demonstraţi că $\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_2p_3}+\frac{1}{p_3p_4}+...+\frac{1}{p_9p_{10}}<\frac{14}{29}$.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ba}\geq\frac{1}{ab}$, cu egalitate pentru $b=a+1$	**2p**
b) Avem $p_1=2, p_2=3, p_3=5, ..., p_{10}=29$, deci	**2p**
$\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_2p_3}+\frac{1}{p_3p_4}+...+\frac{1}{p_9p_{10}}\leq\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{23\cdot29}.=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_{10}}$	**2p**
Aplicând **a)**, obţinem $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{23\cdot29}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}=\frac{1}{2}-\frac{1}{29}$	**3p**
Cum $\frac{1}{2}-\frac{1}{29}=\frac{14}{29}$, rezultă concluzia.	**1p**

Problema 2. Considerăm pătratul $ABCD$ şi punctele $E\in(BC)$, $F\in(DC)$. Dacă $m(\sphericalangle BAE)=15^\circ$ şi $m(\sphericalangle DAF)=30^\circ$, determinaţi $m(\sphericalangle AEF)$.

Gazeta Matematică nr.7-8-9/ 2011

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Avem $m\left(\widehat{FAE}\right)=45^\circ$. 	**1p**
Fie $S\in(CB$ astfel încât $B\in(CS)$ şi $BS=DF$. Atunci $\triangle ABS\equiv\triangle ADF\,(c.c.)$.	**2p**
Obţinem că $m(\sphericalangle EAS)=m\left(\widehat{BAS}\right)+m\left(\widehat{BAE}\right)=45^\circ$, deci $\sphericalangle EAS\equiv\sphericalangle EAF$.	**3p**
Deasemenea, din congruenţa anterioară avem şi $AF=AS$, de unde deducem că $\triangle AEF\equiv\triangle AES\,(L.U.L)$.	**2p**

Atunci $m\left(\widehat{AEF}\right)=m\left(\widehat{AES}\right)=90^\circ-15^\circ=75^\circ$, deci $m\left(\sphericalangle AEF\right)=75^\circ$.	**2p**

Problema 3. a) Dacă x şi y sunt numere raționale cu proprietatea că $x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=0$, demonstrați că $x=y=0$.

b) Determinați toate perechile de numere raționale $(a;b)$ care verifică egalitatea

$\sqrt{2(a+1)^2}-2\sqrt{2}=|b+1|\cdot\sqrt{3}-\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$.

***

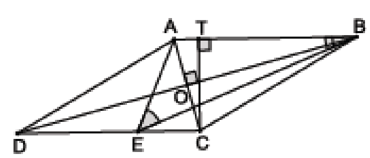
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Presupunem că $y\neq 0$. Atunci relația din enunț este echivalentă cu $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, fals.	**2p**
Rezultă că $y=0$, deci şi $x=0$.	**1p**
b) Relația din enunț devine $\|a+1\|\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\|b+1\|\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}$.	**2p**
Echivalent cu $(\|a+1\|-3)\cdot\sqrt{2}=(\|b+1\|-1)\cdot\sqrt{3}$.	**2p**
Conform a), rezultă $\|a+1\|-3=0$ şi $\|b+1\|-1=0$.	**1p**
Obținem perechile $(2;0),(-4;0),(2;-2);(-4;-2)$.	**2p**

1. **Problema 4.** În rombul *ABCD* bisectoarele unghiurilor $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBD}$ şi dreapta *DC* sunt concurente în *E*.

   a) Determinați măsura unghiului $\widehat{AEB}$;

   b) Aflați măsurile unghiurilor rombului.

prof. *Victor Nicolae, Petre Simion, Mircea Fianu*

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Notăm $m\left(\widehat{DAC}\right)=2x^\circ$. Atunci $m\left(\widehat{BAE}\right)=3x^\circ$, iar	**1p**
$m\left(\widehat{ABE}\right)=m\left(\widehat{ABD}\right)+m\left(\widehat{DBE}\right)=90^\circ-2x^\circ+\frac{90^\circ-2x^\circ}{2}=135^\circ-3x^\circ$.	**1p**
Din suma unghiurilor în triunghiul *ABE*, rezultă că $m\left(\widehat{AEB}\right)=45^\circ$.	**1p**
b) În triunghiurile *BCD* şi *CAD*, *(BE* respectiv *(AE* sunt bisectoare. Conform teoremei bisectoarei obținem: 	
$\frac{BC}{BD}=\frac{EC}{ED}=\frac{AC}{AD}$	**2p**
Rezultă că $BC\cdot AD=BD\cdot AC$	**1p**
Echivalent cu $BC\cdot\frac{AB}{2}=\frac{BD\cdot AC}{2}=A_{ABCD}$	**2p**
Dacă $CT\perp AB, T\in AB$, atunci $AB\cdot CT=AB\cdot\frac{BC}{2}=A_{ABCD}$, deci $CT=\frac{AB}{2}$.	**1p**
Rezultă: $m(\widehat{BAD})=m(\widehat{BCD})=150^\circ$ şi $m(\widehat{ADC})=m(\widehat{ABC})=30^\circ$.	**1p**
Obs. Dacă unghiul $\widehat{DAB}$ este ascuțit, atunci $m(\widehat{BAD})=m(\widehat{BCD})=30^\circ$ şi $m(\widehat{ADC})=m(\widehat{ABC})=150^\circ$.	