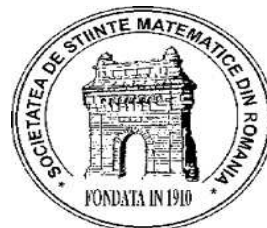


**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A VIII-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se consideră numerele reale strict pozitive  $a, b, c, d$  astfel încât  $a < b < c < d$  și  $a + d = b + c$ .  
Demonstrați că
  - a)  $\sqrt{ad} < \sqrt{bc}$ ;
  - b)  $\sqrt{a} + \sqrt{d} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$ .
2. Se consideră tetraedrul  $ABCD$  cu muchiile opuse perpendiculare. Fie  $AE \perp BC$ ,  $E \in BC$ ,  
 $AF \perp CD$ ,  $F \in CD$ . Fie  $BF \cap DE = \{R\}$  și  $CR \cap BD = \{J\}$ .
  - a) Demonstrați că  $DE \perp BC$ ;
  - b) Demonstrați că  $AJ \perp BD$ .
3. a) Arătați că, pentru orice numere reale  $x, y > 0$ , este adevărată inegalitatea :  $\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} \leq 1$ ;  
b) Demonstrați că, pentru orice numere reale  $a, b, c > 0$  pentru care  $a + b + c = 1$ , este adevărată  
inegalitatea :  $\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{abc}$ .
4. Un patrulater convex are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale astfel încât lungimea  
fiecărei laturi să reprezinte un divizor al sumei lungimilor celorlalte trei laturi. Demonstrați că  
printre laturile patrulaterului există două care au aceeași lungime.



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -**

**CLASA A VIII-A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Problema 1.** Se consideră numerele reale strict pozitive  $a, b, c, d$  astfel încât  $a < b < c < d$  și  $a + d = b + c$ . Demonstrați că:

- a)  $\sqrt{ad} < \sqrt{bc}$  ;  
b)  $\sqrt{a} + \sqrt{d} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$  .

\*\*\*

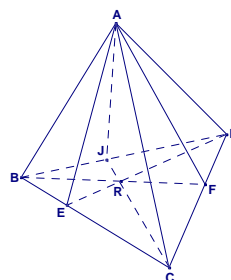
Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem echivalențele $\sqrt{ad} < \sqrt{bc}$ dacă și numai dacă $ad < bc$	1p
sau $ad - ac < bc - ac$ .	2p
Obținem $a(d - c) < c(b - a)$ echivalent cu $a < c$ , ceea ce este adevărat.	2p
b) Prin ridicare la pătrat în ambii membri ai inegalității, obținem inegalitatea echivalentă $a + d + 2\sqrt{ad} < b + c + 2\sqrt{bc}$ .	3p
Cum $a + d = b + c$ , ținând seamă de a), obținem concluzia.	2p

**Problema 2.** Se consideră tetraedrul  $ABCD$  cu muchiile opuse perpendiculare. Fie  $AE \perp BC$  ,  $E \in BC$  ,  $AF \perp CD$  ,  $F \in CD$  . Fie  $BF \cap DE = \{R\}$  și  $CR \cap BD = \{J\}$  .

- a) Demonstrați că  $DE \perp BC$  ;  
b) Demonstrați că  $AJ \perp BD$  .

\*\*\*

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Din ipoteză obținem $BC \perp (AED)$ , deci $BC \perp DE$ .	4p
b) Analog $CD \perp BF$ , deci $R$ este ortocentrul triunghiului $BCD$ .	3p
Atunci $CR \perp BD$ , $BD \perp (ACR)$ și concluzia.	3p



**Problema 3. a)** Arătați că, pentru orice numere reale  $x, y > 0$ , este adevărată inegalitatea :

$$\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} \leq 1;$$

**b)** Demonstrați că, pentru orice numere reale  $a, b, c > 0$  pentru care  $a+b+c=1$ , este adevărată inegalitatea :  $\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{abc}$ .

Gazeta Matematică nr.12/ 2011

Detalii rezolvare	Barem asociat
<b>a)</b> Prin reducere la absurd , presupunem că $\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} > 1$ (*).	<b>1p</b>
Cum $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ , deducem $\frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}$ .	<b>2p</b>
Astfel, din (*), ajungem la : $\frac{1}{\sqrt{xy}} - \frac{1}{xy} > 1$ , fals.	<b>2p</b>
<b>b)</b> Folosind punctul <b>a)</b> și ipoteza, ajungem la : $\frac{1+c}{a+b} = \frac{1+1-a-b}{a+b} = \frac{2}{a+b} - 1 \leq \frac{1}{ab}$ .	<b>2p</b>
Analog, obținem $\frac{1+b}{c+a} \leq \frac{1}{ac}$ și $\frac{1+a}{b+c} \leq \frac{1}{bc}$ .	<b>1p</b>
Însumând ultimele trei relații, obținem $\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{abc}$ .	<b>2p</b>

**Problema 4.** Un patrulater convex are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale astfel încât lungimea fiecărei laturi să reprezinte un divizor al sumei lungimilor celorlalte trei laturi. Demonstrați că printre laturile patrulaterului există două care au aceeași lungime.

\*\*\*

Detalii rezolvare	Barem asociat
Presupunem laturile de dimensiuni diferite $a, b, c, d$ astfel încât $a < b < c < d$ .	<b>1p</b>
Atunci $d < a+b+c < 3d$ .	<b>1p</b>
Cum $a+b+c$ se divide cu $d$ deducem că $a+b+c = 2d$ ,	<b>1p</b>
Rezultă $a+b+c+d = 3d$	<b>2p</b>
Prin urmare, fiecare dintre numerele $a, b, c$ divide suma $a+b+c+d$ , adică divide pe $3d$ .	<b>1p</b>
Fie $x = \frac{3d}{a}$ , $y = \frac{3d}{b}$ și $z = \frac{3d}{c}$ . Din $a < b < c$ , rezultă $x > y > z > 3$ .	<b>1p</b>
Deci $z \geq 4$ , $y \geq 5$ și $x \geq 6$ .	<b>1p</b>
Atunci $2d = a+b+c = \frac{3d}{x} + \frac{3d}{y} + \frac{3d}{z} \leq \frac{3d}{6} + \frac{3d}{5} + \frac{3d}{4} = \frac{111d}{60} < 2d$ , fals. Rezultă concluzia.	<b>2p</b>