Concursul Naţional de Matematică “Arhimede”

Ediţia a IX-a, Etapa a II-a, 11 februarie 2012

Clasa a V-a

I. Ştiind că $a=9^9:3^3:3^6+9^3$ şi $b=3^9$, determinaţi:

(4p) restul împărţirii lui a la b;

(5p) mulţimea divizorilor numărului $a-b$.

Cristina Godeanu-Matei

II. *(4p)* **a)** Să se calculeze:

$$43^2+10^2+7^2+3^2+2^2+1^2$$

(5p) **b)** Să se arate că numărul 2012^{2013} se poate scrie ca suma a şase numere naturale pătrate perfecte.

Niculaie Marin Goşoniu

III. *(4p)* **a)** Să se arate că suma tuturor resturilor obţinute prin împărţirea cu 5 a tuturor numerelor naturale nenule, cel mult egale cu 2005, este un multiplu de 2005.

Ion Burcă

(5p) **b)** Există numere naturale *a, b* astfel încât

$a^a+b^b=\overline{ab}+\overline{ba}$? Justificați

Gheorghe Stoica

IV. Se dau 6 cifre nenule distincte.

(4p) **a)** Să se arate că putem alege două din cele 6 cifre astfel încât acestea să aibă suma 10.

(5p) **b)** Să se arate că putem alege două din cele 6 cifre cu ajutorul cărora putem să formăm un pătrat perfect de două cifre.

Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a IX-a, Etapa a II-a, 11 februarie 2012

Clasa a VI-a

I. Fie $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{100\cdot 101}$ şi

$$S_2 = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + ... + \frac{2}{99\cdot 101}$$

(4p) **a)** Comparaţi S_1 şi S_2.

(5p) **b)** Găsiţi a 987-a zecimală a numărului care se obţine calculând suma S_1.

Cristina Godeanu-Matei

II. Se consideră 6 cifre diferite nenule.

(5p) **a)** Să se demonstreze că putem forma cel puţin şase numere divizibile cu 3, fiecare număr având două cifre distincte, alese dintre cele 6 cifre.

(4p) **b)** Să se afle câte şiruri crescătoare de câte trei numere, fiecare număr având două cifre distincte, putem forma folosind cele 6 cifre.

Traian Preda

III. Unghiurile *AOB* şi *BOC* sunt neadiacente complementare astfel încât $OC \subset Int(\angle AOB)$)

(4p) **a)** Ştiind că $m(\angle BOC) = \frac{2}{3} \cdot m(\angle AOC)$, aflaţi $m(\angle COT)$, unde (*OT* este bisectoarea unghiului *AOB*.

(5p) **b)** Dacă (*OD* este bisectoarea $\angle BOC$ şi (*OE* – bisectoarea $\angle AOC$, demonstraţi că $\angle EOT \equiv \angle BOD$

Cristina Godeanu-Matei

IV. *(9p)* Fie A, O, B trei puncte coliniare, în această ordine şi punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_n – *n* puncte aflate în acelaşi semiplan faţă de dreapta *AB*, astfel încât $m(\angle AOA_1) = 1^\circ$, $m(\angle A_1OA_2) = 2^\circ$, $m(\angle A_2OA_3) = 3^\circ, ..., m(\angle A_{n-1}OA_n) = n^\circ$ şi $m(\angle A_nOB) = (n+1)^\circ$ ($n+1$ grade). Să se afle cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul *n*.

Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"

Ediţia a IX-a, Etapa a II-a, 11 februarie 2012

Clasa a VII-a

I. Fie numerele reale pozitive a,b,c – direct proporţionale cu 2, 3 şi 4.

(4p) **a)** Dacă cel mai mic număr este $\sqrt{12}$, calculaţi media geometrică a celorlalte două numere.

(5p) **b)** Dacă $p=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}}$, găsiţi un triplet (a,b,c) pentru care numărul p este raţional.

II. Fie x un număr real strict pozitiv.

(4p) **a)** Scrieţi numărul x ca produsul a 2012 numere iraţionale, distincte, două câte două.

(5p) **b)** Scrieţi numărul x ca suma a 2012 numere iraţionale distincte două câte două şi strict pozitive.

Traian Preda

III. În triunghiul ABC, punctul D este mijlocul lui (BC) iar E se află pe latura (AC) astfel încât $EC=2AE$. Fie $AD\cap BE=\{F\}$ şi $CF\cap AB=\{T\}$. Să se arate că:

(4p) **a)** $DF=FA$

(5p) **b)** $S(BTF)=2S(AEF)$, unde $S(BTF)$ este aria triunghiului BTF.

Valerica Pometescu, Craiova

IV. *(9p)* Fie paralelogramul $ABCD$, $AB>CD$, MN mediatoarea lui $[DC]$, $N\in(DC)$ şi $M\in(AB)$.

Să se arate că $m(\angle DAB)=m(\angle AMO)$, unde $AC\cap BD=\{O\}$

Ion Neaţă, Slatina

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **3 ore.**

Concursul Naţional de Matematică “Arhimede”

Ediţia a IX-a, Etapa a II-a, 11 februarie 2012

Clasa a VIII-a

I. Fie $E(x)=4x^2-4x+2$

(3p) **a)** Dacă $m=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-2\sqrt{2}$, calculaţi $E(m)$;

(3p) **b)** Srieţi expresia $E(x)$ ca o sumă de două pătrate;

(3p) **c)** Pentru $x\in N$ determinaţi valoarea maximă a expresiei $F(x)=10-E(x)$.

II. *(4p)* **a)** Arătaţi că pentru orice $a,b\in R$ are loc inegalitatea $\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(5p) **b)** Dacă $a,b\in(0,\infty)$, $a\neq b$, să se arate că $\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-b}+\frac{b}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-a}\ge 1$

III. *(9p)* Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, *M* centrul de greutate al triunghiului $A'BD$, *N* şi *P* centrele feţelor $BCC'B'$ respectiv $A'B'C'D'$. Demonstraţi că dacă triunghiul *MNP* este echilateral atunci $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Ion Neaţă, Slatina

IV. Fie *VABC* o piramidă triunghiulară şi punctele $M,A_1\in(VA)$; $N,B_1\in(VB)$; $P,C_1\in(VC)$ astfel încât: $\frac{VM}{MA}=\frac{VN}{NB}=\frac{VP}{PC}=1$ şi $\frac{VA_1}{A_1A}=\frac{VB_1}{B_1B}=\frac{VC_1}{C_1C}=2$.

Notăm cu A_2,B_2,C_2 simetricele punctelor A_1 faţă de *N*, B_1 faţă de *P*, respectiv C_1 faţă de *M*.

(4p) **a)** Demonstraţi că $(A_2B_2C_2)\parallel(ABC)$

(5p) **b)** Calculaţi: $\frac{A_\Delta(A_2B_2C_2)}{A_\Delta(ABC)}$, unde $A_{\Delta XYZ}$ reprezintă aria ΔXYZ.

Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **3 ore.**