Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a IX-a, Etapa a II-a, 11 februarie 2012

Clasa a IX-a

I. Fie $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ trei vectori în plan cu proprietatea că $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}=\vec{0}$

(3p) **1)** Să se arate că:

$$\|\vec{v}_1\|+\|\vec{v}_2\|+\|\vec{v}_3\|=\|\vec{v}_1+\vec{v}_2\|+\|\vec{v}_1+\vec{v}_3\|+\|\vec{v}_2+\vec{v}_3\|$$

(3p) **2)** Să se arate că:

$$\|\vec{v}_1\|\le\|\vec{v}_2\|+\|\vec{v}_3\|$$

$$\|\vec{v}_2\|\le\|\vec{v}_1\|+\|\vec{v}_3\| \qquad (*)$$

$$\|\vec{v}_3\|\le\|\vec{v}_1\|+\|\vec{v}_2\|$$

(3p) **3)** Dacă trei vectori în plan $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ îndeplinesc condiţiile (*), rezultă că $\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3=\vec{0}$?

II. Fie $a,b,c\in R$. Considerăm sistemul de ecuaţii:

$$(S)\begin{cases} y^2+z^2-2ayz=0 \\ x^2+z^2-2bxz=0 \\ x^2+y^2-2cxy=0 \end{cases}$$

Soluţia $x=y=z=0$ a sistemului (S) o vom numi soluţie trivială.

(4p) **1)** Arătaţi că dacă sistemul de ecuaţii (S) admite o soluţie netrivială atunci $a^2+b^2+c^2-2abc=1$

(5p) **2)** Este condiţia de mai sus o condiţie suficientă ca sistemul (S) să aibă o soluţie netrivială?

III. *(9p)* Fie $n\ge 9$ şi $x_1,x_2,...,x_n\in R$ astfel încât:

$$x_1+x_2+...+x_n\ge 2$$

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\ge 2$$

Arătaţi că $\max\{x_1,x_2,...,x_n\}\ge\dfrac{3}{n}$

Lucian Tuţescu, Craiova

IV. *(9p)* Să se demonstreze că:

$$(1+x+...+x^n)^{n+1}\ge(1+x+...+x^{n+1})^n,\ (\forall)x\in R_+,\ n\in N^*.$$

Sorin Rădulescu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **3 ore.**

Concursul Naţional de Matematică “Arhimede”

Ediţia a IX-a, Etapa a II-a, 11 februarie 2012

Clasa a X-a

I. Să se rezolve următoarele ecuaţii trigonometrice:

(4p) **1)** $\sin x + \sin 5x + \sin 9x = 3$

(5p) **2)** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 3$

II. Să se rezolve următoarele ecuaţii exponenţiale:

(3p) **1)** $13 + 2^x = 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}$

(3p) **2)** $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

(3p) **3)** $2^x + 3^x = 2^{2x} + 3^{2x}$

III. Să se arate că:

(3p) **1)** $\left|z^4+1\right| \ge \left(\left|z^2+1\right| - |z|\sqrt{2}\right)^2,\ (\forall)\ z \in C$

(3p) **2)** $\left|z^4+1\right| \ge \left(\left|z^2-1\right| - |z|\sqrt{2}\right)^2,\ (\forall)\ z \in C$

(3p) **3)** $\left|z^2+6z+1\right| \ge \left(|z+1|\sqrt{2} - |z-1|\right)^2,\ (\forall)\ z \in C$

Marius Drăgan

IV. Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ cu proprietatea că

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = z_1 + z_2 + z_3 = 1$

Dacă $z_1 z_2 z_3 = a$ şi $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n$,(n ≥ 3) atunci:

(3p) **1)** Să se calculeze S_n în funcţie de a;

(3p) **2)** Dacă $S_n \in Z$ atunci $S_n \in \{-1;1;3\}$

(3p) **3)** Dacă $S_n \in Z$ şi n este un număr natural par, atunci $a^n = 1$.

Sorin Radulescu, Mihai Piticari

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **3 ore.**

Concursul Naţional de Matematică “Arhimede”

Ediţia a IX-a, Etapa a II-a, 11 februarie 2012

Clasa a XI-a

I. Să se calculeze următoarele limite:

(3p) **1)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\geq 1$, $m,n\in N$

(3p) **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - tgx}{\sin 2x - tg2x}$

(3p) **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

II. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin:

$$a_n=\frac{(-1)^{1^2}+(-1)^{2^2}+\ldots+(-1)^{n^2}}{n},\ n\geq 1$$

(3p) **1)** Calculaţi a_1, a_2, a_3 şi a_4

(3p) **2)** Calculaţi a_{2n} şi a_{2n+1}, unde $n\geq 1$

(3p) **3)** Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

III. Fie $A,B\in M_2(C)$ cu proprietăţile:

$AB+BA=I_2$ şi $tr(B)\neq 0$

Să se demonstreze că:

(4p) **1)** $(trA)\cdot B+(trB)\cdot A$ este inversabilă

(5p) **2)** $\det A+\det B\neq 1+\det(A+B)$

Marius Drăgan

IV. *(9p)* Fie $n\geq 2$ şi $p\geq 1$ două numere naturale şi $A,B\in M_n(C)$ două matrici care îndeplinesc condiţia: $A^p+B^p=O_n=AB$. Să se demonstreze că $B^h\cdot A^{n-h}=O_n=A^n=B^n$, pentru orice $h\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Sorin Radulescu, Mihai Piticari

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **3 ore.**

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"

Ediţia a IX-a, Etapa a II-a, 11 februarie 2012

Clasa a XII-a

I. Fie $a \in (1,\infty)$. Pe $G=(0,\infty)$ se introduce următoarea lege de compoziţie:

$$x * y = 2\log_a\left[\left(\sqrt{a^x}-1\right)\left(\sqrt{a^y}-1\right)+1\right],\ (\forall)\ x,y\in G$$

Să se demonstreze că:

(4p) **1)** Legea „*" este lege de compoziţie internă pe G.

(5p) **2)** $(G,*)$ este grup abelian.

Aurel Doboşan, Bot Trandafir

II. Spunem că un corp *K* are proprietatea *(P)* dacă

$x^3+y^3=x^2y+xy^2$, pentru orice $x,y\in K^*=K\setminus\{0\}$.

(3p) 1) Arătaţi că $(Z_2,+,\cdot)$ şi $(Z_3,+,\cdot)$ sunt corpuri care au proprietatea *(P)*.

(3p) 2) Dacă corpul *K* are proprietatea *(P)* arătaţi că

$x^3-x^2-x+1=0$ pentru orice $x\in K^*$.

(3p) 3) Arătaţi că orice corp *K* cu proprietatea *(P)* are cel mult 3 elemente.

Teodora Liliana Rădulescu

III. *(9p)* Fie $a,b\in R$, $a<b$, funcţia continuă $f:[a,b]\to R$ şi $F:[a,b]\to R$ o primitivă a lui *f*.

Considerăm funcţia $G(x)=(x-a)\ F(b)+(b-x)\ F(a)-(b-a)\ F(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$.

Să se arate că dacă f este descrescătoare pe $[a,b]$, atunci $G(x)\le 0$, $(\forall)x\in[a,b]$ şi dacă f este crescătoare pe $[a,b]$ atunci $G(x)\ge 0$, $(\forall)x\in[a,b]$.

Gheorghe Stoica

IV. *(9p)* Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie integrabilă Riemann. Atunci

$$\left(\int_a^b |f(t)|\,dt\right)^4 \le 16\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b (t-a)^2 f^2(t)dt\right)$$

Sorin Rădulescu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **3 ore.**