INSPECTORATUL SCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCURESTI
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSE MARTI - BUCUREŞTI

C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Jose Marti"

Ediția a XI-a, 04.02.2012

Clasa a VI-a

1. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C şi D, în această ordine, astfel încât $AB = 2,7$ cm, $BC = 5,42$ cm şi $CD = 1,895$ cm. Punctele segmentelor (AB) şi (CD) sunt colorate în gri, iar punctele segmentului (BC) sunt colorate în roşu. Segmentul $[MN]$ are lungimea egală cu l cm, $l \in \mathbb{N}^*$, şi este inclus în segmentul (AD).

a) Arătați că $l \leq 10$;

b) Aflați cea mai mică valoare a lui l astfel încât, indiferent de poziția segmentului $[MN]$, punctele M şi N să fie colorate la fel.

2. Cei n divizori, $d_1, d_2, ..., d_n$ ai numărului 46656 se scriu în ordine crescătoare astfel: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_n = 46656$.

a) Demonstrați că $n > 40$;

b) Calculați d_{40}.

3. Măsura unghiului $\widehat{xOy}$ este exprimată în grade printr-un număr natural. Semidreptele diferite $[Oz$ şi $[Ot$ sunt interioare unghiului $\widehat{xOy}$ astfel încât unghiurile $\widehat{xOz}$ şi $\widehat{tOy}$ au interioare disjuncte. Se ştie că $m\left(\widehat{xOz}\right) = \overline{ab}^\circ\,(b+3c)'$, $m\left(\widehat{zOt}\right) = \overline{bc}^\circ\,(c+3a)'$ şi $m\left(\widehat{tOy}\right) = \overline{ca}^\circ\,(a+3b)'$, unde a, b, şi c sunt cifre, iar $0 < a < b < c$.

a) Determinați măsura unghiului $\widehat{xOy}$;

b) Determinați cea mai mică valoare posibilă a măsurii unghiului $\widehat{xOz}$.

4. Se consideră mulțimea $M = \left\{2^1; 2^2; ...; 2^{16}\right\}$. Arătați că:

a) există două submulțimi disjuncte P şi Q ale mulțimii M astfel încât $P \cup Q = M$, iar produsul elementelor din P este egal cu produsul elementelor din Q.

b) **nu** există două submulțimi diferite X şi Y ale mulțimii M astfel încât suma elementelor din X să fie egală cu suma elementelor din Y.

SUCCES!

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
- Timp de lucru efectiv : 2 ore.

INSPECTORATUL SCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCURESTI
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSE MARTI - BUCUREŞTI

C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Jose Marti"

Ediția a XI-a, 04.02.2012

Clasa a VI-a

Soluții şi bareme

1.	**a)** Deoarece $[MN]\subset(AD)$, rezultă că $MN<AD$.	**1p**
	$AD=AB+BC+CD=10,015\,\text{cm}$.	**1p**
	Cum $l\in\mathbb{N}$ şi $l<10,015$, rezultă că $l\le 10$.	**1p**
	b) Răspuns: 9 cm	
	Avem $AC=AB+BC=8,12\,\text{cm}$ şi $BD=BC+CD=7,315\,\text{cm}$	**1p**
	Dacă $l\le 8$, atunci punctul *M* poate fi situat în interiorul segmentului (AB), iar punctul *N* poate fi situat în interiorul segmentului (BC), deci cele două puncte au culori diferite. Rezultă că $l\in\{9;10\}$.	**2p**
	Deci, valoarea minimă cerută este $l=9\,\text{cm}$	**1p**
2.	**a)** Avem $46656=2^6\cdot 3^6$.	**1p**
	Divizorii numărului $2^6\cdot 3^6$ sunt de forma $2^a\cdot 3^b$, unde $a\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$ şi $b\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.	**1p**
	Numărul total de divizori va fi $n=7\cdot 7=49>40$.	**1p**
	b) Răspuns: 2592	
	Dacă numărul *d* este divizor al lui 46656, atunci şi numărul $\frac{46656}{d}$ este divizor al lui 46656.	**1p**
	Cum divizorii sunt ordonați crescător, înseamnă că $d_k\cdot d_{50-k}=46656$, pentru oricare $k\in\{1;2;...;49\}$, deci $d_{40}=46656:d_{10}$.	**2p**
	Se calculează $d_{10}=18$, deci $d_{40}=46656:18=2592$.	**1p**
3.	**a)** Răspuns: 166°	
	Avem $m(\widehat{xOy})=m(\widehat{xOz})+m(\widehat{zOt})+m(\widehat{tOy})$.	
	Deci $m(\widehat{xOy})=[11\cdot(a+b+c)]^\circ[4(a+b+c)]'$.	**1p**
	Cum $m(\widehat{xOy})\in\mathbb{N}$, înseamnă că numărul $a+b+c$ este multiplu de 15.	**2p**
	Dar $0<a+b+c<27$, deci $a+b+c=15$,	**1p**
	Prin urmare, $m(\widehat{xOy})=(11\cdot 15)^\circ(4\cdot 15)'=166^\circ$.	**1p**
	b) Răspuns: $15^\circ 32'$	
	Valoarea minimă se obține pentru $a=1$. Obținem $b+c=14$, de unde $b\ge 5$.	**1p**
	Valoarea minimă a lui *b* este $b=5$ şi deci $c=9$. Obținem $m(\widehat{xOy})=15^\circ 32'$.	**1p**
4.	**a)** Produsul elementelor din mulțimea *M* este egal cu $2^{1+2+...+16}=2^{136}=(2^{68})^2$	**1p**
	Deci produsul elementelor din *P* este egal cu 2^{68}. Luăm	**1p**

	$P=\{2^{10};2^{13};2^{14};2^{15};2^{16}\}$ şi $Q=M\setminus P$.	**1p**
	b) Considerăm submulțimile X şi Y diferite, atunci $X=(X\setminus Y)\cup(X\cap Y)$, iar $Y=(Y\setminus X)\cup(X\cap Y)$. Presupuând $\text{card}\,X=\text{card}\,Y$, atunci $\text{card}(X\setminus Y)=\text{card}(Y\setminus X)$.	**1p**
	Fie 2^a cel mai mic element din $X\setminus Y$ şi 2^b cel mai mic element din $Y\setminus X$. Evident $a\neq b$.	**1p**
	Dacă $a<b$, atunci suma elementelor din $Y\setminus X$ se divide cu 2^b, iar suma elementelor din $X\setminus Y$ se divide cu 2^a şi nu se divide cu 2^b. Contradicție.	**2p**