INSPECTORATUL SCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCURESTI
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSE MARTI – BUCUREŞTI
C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Jose Marti"
Ediția a XI-a, 04.02.2012

Clasa a VIII-a

1. **a)** Dacă x şi y sunt două numere reale nenule cu proprietatea că $x-y=xy$, calculați valoarea expresiei $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-xy$.

b) Determinați numărul de perechi de numere naturale $(m;n), m<n$, care verifică egalitatea $\frac{3}{8}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

2. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $AC\cap BD=\{O\}$, iar punctul M este centrul de greutate al triunghiului BCB', arătați că $D'O\perp(AMC)$.

3. **a)** Determinați cel mai mare număr natural p cu proprietatea că există un număr natural n astfel încât fiecare dintre numerele $n, n+1, ..., n+p$ este suma a două pătrate perfecte;
b) Arătați că există o infinitate de valori naturale ale lui n astfel încât fiecare dintre numerele $n, n+1, n+2$ este suma a două pătrate perfecte.

4. Demonstrați că, în orice triunghi, există două laturi cu lungimile a şi b astfel încât

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{a}{b}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

SUCCES!

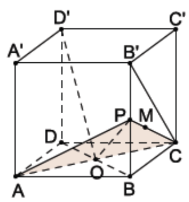
Notă:
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
- Timp de lucru efectiv : 3 ore.

C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Jose Marti"

Ediția a XI-a, 04.02.2012

Clasa a VIII-a

Soluții şi bareme

1.	**a)** Răspuns: 2	
	Avem $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-xy=\frac{x^2+y^2}{xy}-xy=\frac{(x-y)^2+2xy}{xy}-xy=\frac{(xy)^2}{xy}+2-xy=2$.	**3p**
	b) Ecuația este echivalentă cu $(3m-8)(3n-8)=64$.	**2p**
	Obținem soluțiile $(m;n)\in\{(3;24);(4;8)\}$.	**2p**
2.	Avem $D'O\perp AC$ (T.3.$\perp$). (1)	**1p**
	 Considerăm $AB=a$. Rezultă $DO=BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.	**1p**
	Fie $\{P\}=CM\cap BB'$. Rezultă că P este mijlocul segmentului $[BB']$ şi $BM=\frac{a}{2}$.	**2p**
	Triunghiurile *PBO* şi *ODD'* sunt dreptunghice, iar $\frac{PB}{OD}=\frac{OB}{DD'}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.	**1p**
	Rezultă $\triangle PBO\sim\triangle ODD'$, deci unghiurile $\widehat{POB}$ şi $\widehat{DOD'}$ sunt complementare. Prin urmare $D'O\perp PO$ (2).	**1p**
	Din (1) şi (2), rezultă $D'O\perp(AMC)$	**1p**
3.	**a)** Răspuns: $p=2$	
	Dacă $p\geq 3$ secvență conține cel puțin 4 numere consecutive.	**1p**
	Din oricare 4 numere consecutive, unul este de forma $4m+3$, $m\in\mathbb{N}$.	**1p**
	Cum pătratele perfecte sunt de forma $4t$ sau $4t+1, t\in\mathbb{N}$, rezultă că numerele de forma $4m+3$, $m\in\mathbb{N}$, nu pot fi suma a două pătrate perfecte. Deci $p\leq 2$.	**1p**
	Pentru $p=2$, există $n=0$ astfel încât $0=0^2+0^2, 0+1=0^2+1^2, 0+2=1^2+1^2$.	**1p**
	b) Pentru oricare $k\in\mathbb{N}$, luăm $n=2\cdot[k(k+1)]^2$ şi avem: $n=[k(k+1)]^2+[k(k+1)]^2$,	**1p**
	$n+1=(k^2+2k)^2+(k^2-1)^2$ şi	**1p**
	$n+2=(k^2+k-1)^2+(k^2+k+1)^2$.	**1p**
4.	Dacă triunghiul este isoscel, luăm $a=b$ şi $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{a}{b}=1<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.	**1p**
	Pe baza proprietăților asemănării, putem considera că laturile triunghiului sunt $1<x<y$ şi presupunem că $\frac{x}{1}\geq\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ şi $\frac{y}{x}\geq\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.	**1p**
	Atunci $x=\varepsilon+\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ şi $y\geq\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}+\varepsilon\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, unde $\varepsilon>0$.	**2p**

	Deoarece $1+x>y$, obținem $1+\varepsilon+\frac{\sqrt{5}+1}{2}>\frac{\sqrt{5}+3}{2}+\varepsilon\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, adică $\varepsilon>\varepsilon\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, contradicție.	**2p**
	Rezultă că $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1<\frac{x}{1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sau $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1<\frac{y}{x}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.	**1p**