INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARGEŞ

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

Concursul Judeţean de Matematică „Dan Barbilian” – 17.12.2011

Clasa a IX-a

Varianta 1

SUBIECTE:

1. Fie a>0, n natural, n≥2 şi $x_i \in$ (-a,a), i = $\overline{1,n}$. Să se demonstreze că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(a-x_1)(a+x_2)}+\sqrt{(a-x_2)(a+x_3)}+\ldots+\sqrt{(a-x_{n-1})(a+x_n)}+\sqrt{(a-x_n)(a+x_1)}\le$$
$$\le\sqrt{n^2a^2-(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}$$

2. Fie ABC un triunghi. Pe latura BC, considerăm punctele D,E,F astfel încât BD=DE=EF=FC. Fie M şi N puncte pe laturile AB şi respectiv, AC. Să se arate că MD, AE şi NF sunt concurente dacă şi numai dacă $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\neq\frac{1}{2}$.

3. Fie numerele naturale nenule $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$, k astfel încât: $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le a_{n+1}$. Demonstraţi inegalitatea: $\left[\frac{a_2-a_1}{k}\right]+\left[\frac{a_3-a_2}{k}\right]+\ldots+\left[\frac{a_{n+1}-a_n}{k}\right]+n-1\ge\left[\frac{a_{n+1}-a_1}{k}\right]$.

4. Se consideră poligonul convex ABCDE şi se notează cu M,N,P,Q,R mijloacele laturilor [AB] , [BC] , [CD] , [DE] respectiv [EA] şi cu A_1, B_1 , C_1 , D_1 , E_1 mijloacele segmentelor NQ , PR , QM , RN respectiv MP.

a) Arătaţi că $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{EE_1}=\vec{0}$.

b) Calculaţi raportul ariilor poligoanelor $A_1B_1C_1D_1E_1$ şi ABCDE.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Barem de corectare :

1. Notăm: $S=x_1+x_2+...+x_n$

Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu:

$$\sqrt{\frac{(a-x_1)(a+x_2)}{(na-s)(na+s)}}+\sqrt{\frac{(a-x_2)(a+x_3)}{(na-s)(na+s)}}+\dots+\sqrt{\frac{(a-x_n)(a+x_1)}{(na-s)(na+s)}}\le 1$$ …… 2p

Aplicând inegalitatea mediilor obţinem:

$$\sqrt{\frac{(a-x_1)(a+x_2)}{(na-s)(na+s)}}\le\frac{\frac{a-x_1}{na-s}+\frac{a+x_2}{na+s}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{(a-x_2)(a+x_3)}{(na-s)(na+s)}}\le\frac{\frac{a-x_2}{na-s}+\frac{a+x_3}{na+s}}{2}$$

……….

$$\sqrt{\frac{(a-x_n)(a+x_1)}{(na-s)(na+s)}}\le\frac{\frac{a-x_n}{na-s}+\frac{a+x_1}{na+s}}{2}$$ ………3p

Însumând relaţiile membru cu membru se obţine:

$$\sqrt{\frac{(a-x_2)(a+x_3)}{(na-s)(na+s)}}+\sqrt{\frac{(a-x_1)(a+x_2)}{(na-s)(na+s)}}+\dots+\sqrt{\frac{(a-x_n)(a+x_1)}{(na-s)(na+s)}}$$

$$\le\frac{\frac{na-s}{na-s}+\frac{na+s}{na+s}}{2}=1$$ ………………………………………………………………..2p

2. $\text{MD} \cap AE \neq \emptyset \Rightarrow \frac{AM}{AB} \neq \frac{1}{2}$

$\text{NF} \cap \text{AE} \neq \emptyset \Rightarrow \frac{AN}{NC} \neq \frac{1}{2}$ ……………………………………………1p

T. Menelaus în triunghiul ABE, M-D-P

$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DE} \cdot \frac{EP}{AP} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AP}{EP}$ ………………………………………..1p

T. Menelaus în triunghiul ACE, N-F-P

$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{EP}{AP} = 1 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AP}{EP}$ ………………………………………1p

$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ………………………………………………………1p

Dacă $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{NC} \neq \frac{1}{2}$, {P}=MD $\cap$ AE, { P' }=NF $\cap$ AE

$\frac{AP'}{EP'} = \frac{AM}{MB}; \frac{AP}{EP} = \frac{AN}{NC}$ ……………………………………………2p

$\frac{AP'}{EP'} = \frac{AP}{EP} \Rightarrow EP' = EP \Rightarrow P'$ coincide cu P…………………………1p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

3. Fie:

$a_2 - a_1 = c_1 k + r_1$

$a_3 - a_2 = c_2 k + r_2$

……………………… $\quad r_i < k, i = \overline{1, n}$ …………..2p

………………………

$a_{n+1} - a_n = c_n k + r_n$

Atunci: $\left[\frac{a_2 - a_1}{k}\right] = c_1$; $\left[\frac{a_3 - a_2}{k}\right] = c_2$, … $\left[\frac{a_{n+1} - a_n}{k}\right] = c_n$ ……..1p

Mai mult, prin însumarea relaţiilor de mai sus, avem:

$$a_{n+1} - a_1 = (c_1 + \ldots + c_n)k + (r_1 + \ldots + r_n) \Rightarrow \left[\frac{a_{n+1} - a_n}{k}\right] = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + + \left[\frac{r_1 + \ldots + r_n}{k}\right] \ldots 1\text{p}$$

Va trebui să demonstrăm că:

$$c_1 + \ldots + c_n + n - 1 \geq c_1 + \ldots + c_n + \left[\frac{r_1 + \ldots + r_n}{k}\right] \Leftrightarrow n - 1 \geq \left[\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{k}\right] \ (1)$$

Pe de altă parte, din condiţiile $r_i < k$, $i=\overline{1,n} \Rightarrow r_1+r_2+...+r_n < k\cdot n \Leftrightarrow \frac{r_1+r_2+...+r_n}{k} < n \Leftrightarrow \left[\frac{r_1+...+r_n}{k}\right] \le n-1$, ceea ce înseamnă că relaţia (1) este adevărată $\Rightarrow$ concluzia problemei…….3p

4. Notăm cu $\overrightarrow{r_X}$ vectorul de poziţie al punctului $X\left(\overrightarrow{r_X}=\overrightarrow{OX}\right)$ şi avem :

$$\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}\right),\ \overrightarrow{r_N}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right),\ \overrightarrow{r_P}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D}\right),\ \overrightarrow{r_Q}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_A}\right),\ \overrightarrow{r_R}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_A}\right)$$

$$\overrightarrow{r_{A_1}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_N}+\overrightarrow{r_Q}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_E}\right)$$

$$\overrightarrow{r_{B_1}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_P}+\overrightarrow{r_R}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_A}\right)$$

$$\overrightarrow{r_{C_1}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_Q}+\overrightarrow{r_M}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}\right)$$

$$\overrightarrow{r_{D_1}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_N}+\overrightarrow{r_Q}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$$

$$\overrightarrow{r_{E_1}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_M}+\overrightarrow{r_P}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D}\right)\text{……………..3p}$$

a) $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{r_{A_1}}-\overrightarrow{r_A}... \Rightarrow \overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{EE_1}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{B_1}}+\overrightarrow{r_{C_1}}+\overrightarrow{r_{D_1}}+\overrightarrow{r_{E_1}}=\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_E}$

relatie ce este verificata………..1p

b) Avem $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{r_{B_1}}-\overrightarrow{r_{A_1}}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{r_A}-\overrightarrow{r_B}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$, deci $A_1B_1 \parallel AB$ si $A_1B_1=\frac{1}{4}AB.$

Analog $B_1C_1 \parallel BC$ si $B_1C_1=\frac{1}{4}BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ si $C_1D_1=\frac{1}{4}CD$, $D_1E_1 \parallel DE$ si $D_1E_1=\frac{1}{4}DE$, $E_1A_1 \parallel EA.$ si $E_1A_1=\frac{1}{4}EA.$…………..2p

Pentagoanele $ABCDE$ si $A_1B_1C_1D_1E_1$ sunt asemenea cu raportul laturilor $\frac{1}{4}$ deci raportul ariilor este $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$…………1p

Concursul Judeţean de Matematică
„Dan Barbilian” – 17.12.2011
Clasa a X-a

Varianta 1

SUBIECTE:

1. Ştiind că $(\exists)x, y \in \mathbb{R}_+$ pentru care $3^y = 4$ şi $2^x = 3$ să se determine semnul expresiei $E(x, y) = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$.

2. Fie a>1 şi f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=$a^x + a^{\frac{6}{x}}$. Studiaţi monotonia funcţiei f şi determinaţi numerele raţionale x astfel încât $2^x + 2^{\frac{6}{x}} + 3^x + 3^{\frac{6}{x}} = 48$

3. Fie a, b >0 şi $b \geq a^2$. Să se arate că dacă z$\in C$ astfel încât $|z+a| \leq a$, $|z^2+b| \leq b$, atunci $|z| \leq \dfrac{b}{a}$.

4. Fie numerele complexe nenule a,b,c,d cu proprietăţile : $|a| = |b| = |c| = |d|$ şi $abc + abd + acd + bcd = 0$. Arătaţi că $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = 0$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Barem
Clasa a X-a , Varianta 1

1. $E(x,y)=x^3+x^2y-xy^2-y^3=(x-y)(x+y)^2$ 2p
   $E(x,y)=x^3+x^2y-xy^2-y^3$, are acelaşi semn cu $x-y$ 1p
   $2^{\frac{3}{2}}<3$ şi $3^{\frac{3}{2}}>4$ 2p
   $x>\frac{3}{2}>y$ 1p
   $E(x,y)=x^3+x^2y-xy^2-y^3>0$ 1p
2. $f(x)-f(y)=a^{\frac{6}{y}}\left(a^{\frac{xy-6}{y}}-1\right)-a^{\frac{6}{x}}\left(a^{\frac{xy-6}{x}}-1\right)$, unde $x,y\in\mathbb{R}$. 1p
   $y>x>\sqrt{6}\Rightarrow f(x)<f(y)$.................... 1p
   $0<x<y<\sqrt{6}\Rightarrow f(x)>f(y)$..................1p
   Finalizare...1p

Din monotonia lui f rezultă că ecuaţia are cel mult câte o soluţie în intervalele $(0,\sqrt{6})$ respectiv $(\sqrt{6},\infty)$...2p
x_1=2 respectiv x_1=3 soluţiile ecuaţiei.........................1p

3. $|z+a|\le a\Rightarrow|z+a||\bar{z}+a|\le a^2\Rightarrow|z|^2+a(z+\bar{z})\le 0\,(1)$........................2p
   Analog $|z|^4+b\left(z^2+\bar{z}^2\right)\le 0$ de unde $|z|^4+b(z+\bar{z})^2-2b|z|^2\le 0\,(2)$..........1p
   (1) şi (2) => $|z|^4+\frac{b}{a^2}|z|^4-2b|z|^2\le 0$.....................1p
   $z\ne 0\Rightarrow|z|^2\le\frac{2ba^2}{a^2+b}$ 1p
   $a^2\le b\Rightarrow|z|\le\frac{b}{a}$......................................1p
   Verificare cazul *z=0* 1p
4. Din ipoteză rezultă, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$.............1p.
   $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}=0\Rightarrow a+b+c+d=0$.....................1p
   $(a+b)(a+c)(a+d)=0\Rightarrow a+b=0$ *sau* $a+c=0$ *sau* $a+d=0$........2p

Dacă $a+b=0\Rightarrow c+d=0$..1p
Rezultă $a^5+b^5=0$ şi $c^5+d^5=0$................................1p
Finalizare..1p
Notă: orice soluţie alternativă corectă se notează corespunzător

Concursul Judeţean de Matematică
„Dan Barbilian” – 17.12.2011
Clasa a XI-a

Varianta 1

SUBIECTE:

1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB = BA$ şi $\det\left(A^2 + B^2\right) = 0$

Arătaţi că $\det A = \det B$.

2. Fie şirul (x_n) definit astfel: $x_1 \in (1,2)$ și $x_n^3 + x_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

   a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

   b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$.

3. Fie n un număr natural impar şi $A \in M_n(R)$.
   a) Dacă $A^2 = 0_n$, să se arate că $\det(2011A + 2I_n) \geq 0 \geq \det(2011A - 2I_n)$.
   b) Dacă $A^2 = I_n$, să se demonstreze că $\det(A - I_n)^{2011} \leq 0$.

4. Se dă șirul (a_n) cu $a_1 = \dfrac{1}{2}$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_n + 2)}$.

   a) Arătați că $a_n < \dfrac{2n^2}{2n+1}, \forall n \geq 1$.

   b) Demonstrați că șirul $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ este convergent

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Barem de corectare:

1. Fie $f(x)=\det(A+Bx)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Avem $f(0)=\det A=\gamma$.

Pe de altă parte $x^2\det\left(\frac{1}{x}A+B\right)=x^2\left(\alpha+\beta\frac{1}{x}+\gamma\frac{1}{x^2}\right)$, pt $x\neq 0\Rightarrow$

$\det(tA+B)=\alpha+\beta t+\gamma t^2$. Pentru $t=o\Rightarrow\det B=\alpha$. Deci $\det(A+Bx)=$

$\det Bx^2+\beta x+\det A.$

În cazul nostru: $\begin{matrix} f(i)=\det(A+iB) \\ f(-i)=\det(A-iB)\end{matrix}$ ... (2p)

Cum $AB=BA$ și $0=\det\left(A^2+B^2\right)=\det(A+iB)\cdot\det(A-iB)$

$=f(i)\cdot f(-i).$ ... (2p)

Avem $f(i)=0$ sau $f(-i)=0$. Deci $\det B(i)^2+\beta i+\det A=0$ ... (2p)

$-\det B+\det A=0\Leftrightarrow\det A=\det B.$ ... (1p)

<u>Obs.:</u> $\beta=0$ căci $f(x)$ are coeficienți reali deoarece elementele matricelor

A și B sunt numere reale.

2. Prelucrăm ecuația din ipoteză și obținem:

a) $(x_n-1)\left(x_n^2+x_n+1\right)=\frac{1}{n+1}>0\Rightarrow x_{n-1}>0\Rightarrow x_n>1.$ ... (2p)

Pe de alta parte $0<x_{n-1}=\frac{1}{(n+1)\left(x_n^2+x_n+1\right)}<\frac{1}{3(n+1)}<1,\forall n\in\mathbb{N}.$

Deci $x_n<2$. Astfel $x_n\in(1,2)$. ... (1p)

Din $0<x_n-1<\frac{1}{3(n+1)}$. Trecând la limită obținem

$\lim(x_n-1)=0\Leftrightarrow\lim(x_n)=1.$ ... (2p)

b) $x_n - 1 = \frac{1}{(n+1)(x_n^2 + x_n + 1)}$. $n(x_n - 1) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{x_n^2 + x_n + 1}$. ... (1p)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. ... (1p)

3.

a) Fie $B = 2011\,A \Rightarrow B^2 = O_n$ 1p

$\det(B + 2I_n) = \det(B^2 + B + 2I_n) \geq 0$ 2p

$\det(B - 2I_n) = \det(-B^2 + B - 2I_n) = (-1)^n \det(B^2 - B + 2I_n) \leq 0$ 1p

b) $0 \leq \det(A - I_n)^2 = \det(A^2 - 2A + I_n) = \det[(-2)(A - I_n)] = (-2)^n \det(A - I_n) =$
$= -2^n \det(A - I_n)$, deci $\det(A - I_n) \leq 0$ şi finalizare
.... 3p

4.

a) $a_1 < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ (A) ... (1p)

Presupunem $a_n < \frac{2n^2}{2n+1} \Rightarrow a_{n+1} < \frac{2(n+1)^2}{2n+3}$.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_n+2)} < \sqrt{\frac{2n^2 \cdot 2(n+1)^2}{(2n+1)^2}} < \frac{2(n+1)^2}{2n+3}.$$

Se obţine $2n^2 + 3n < 2n^2 + 3n + 1$ (A). ... (3p)

a) $0 < \frac{a_n}{n} < \frac{2n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}(2n+1)} < 1 \Rightarrow b_n < 1$. Deci $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. ... (1p)

Vom arăta că şirul (b_n) este crescător:

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{a_n}{n} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a_n(a_n+2)}}{n+1} > a_n(n+1).$$

Se obţine $a_n < \frac{2n^2}{2n+1}$ validă pentru a)

Concursul Judeţean de Matematică
„Dan Barbilian" – 17.12.2011
Clasa a XII-a

Varianta 1

SUBIECTE:

1. Fie $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $M = \{A(m) \mid m \in Z\}$

   a) Să se demonstreze că $\left(M, \cdot\right)$ este grup abelian izomorf cu $(Z,+)$,

   b) Rezolvaţi ecuaţia $(A(m))^n = A(2011), m \in Z, n \in N$

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu un număr impar de elemente şi $f: G \to G,\ \ f(x) = x^2$
   Să se arate că G este grup abelian dacă şi numai dacă f este automorfism.

3. Calculaţi: $I = \int \frac{-x\sin x - 2\cos x - 2}{(x+\sin x)^2} dx, x > 0$

R.M.T. Nr. 4/2011

4. Fie $f: R \to R$ astfel încât $f^{2011}(x) + f(x) = x + \sin x, (\forall) x \in R$.
   Să se arate că funcţia f admite primitive.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Barem de corectare
Clasa a XII-a, varianta 1

1. a) $\left(M, \cdot\right)$ grup comutativ, ... 3 p

   $f : Z \to G,\ f(m) = A(m-1)$ izomorfism, ...1 p

   b) $\left(A(m)\right)^n = A(mn+n-1)$, ... 1 p

   $n(m+1) = 2012$, $(m,n) \in \{(2011,1),(1005,2),(502,4),(3,503),(1,1006),(0,2012)\}$.... 2 p

2. „$\Rightarrow$”

   $(G,\cdot)$ abelian, $(xy)^2 = x^2y^2, (\forall)x,y \in G$, rezultă f endomorfism, ... 1 p

   $CardG$ număr impar , $Kerf = \{x \in G | f(x) = e\} = \{e\} \Rightarrow$ f injectivă, ... 2 p

   G finit şi f injectivă $\Rightarrow$ f bijectivă, f izomorfism, ... 2 p

   „$\Leftarrow$”

   $f : G \to G,\ f(x) = x^2$, izomorfism, $f(xy) = f(x)f(y), (\forall)x,y \in G$, ... 1 p

   Rezultă $(xy)^2 = x^2y^2, (\forall)x,y \in G \Rightarrow xy = yx, (\forall)x,y \in G$, $(G,\cdot)$ abelian, ... 1 p

3. $I = \int \frac{-x\sin x - \cos x - 1}{(x+\sin x)^2}dx - \int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2}dx$, ... 2 p

   $\int \frac{-x\sin x - \cos x - 1}{(x+\sin x)^2}dx = \int \left(\frac{\cos x}{x+\sin x}\right)' dx = \frac{\cos x}{x+\sin x} + c$, ... 2 p

   $\int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2}dx = \int \frac{(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2}dx = -\frac{1}{x+\sin x} + c$, ... 2 p

   Finalizare, ... 1 p

4. Funcţiile $u,v : R \to R, u(x) = x^{2011} + x, v(x) = x + \sin x$ sunt bijective, ... 2 p

   $u(f(x)) = v(x), (\forall)x \in R \Rightarrow f(x) = u^{-1}(v(x))$, ... 2 p

   $u,v : R \to R$ continue $\Rightarrow f = u^{-1} \circ v$ continuă, ... 2 p

   f continuă $\Rightarrow$ f admite primitive, ...1 p

Observaţie:
Pentru orice altă soluţie corectă se acordă punctajul corespunzator