Liceul Teoretic „Mihail Kogălniceanu”
str. Mihail Kogalniceanu, nr. 19, Vaslui, 730104
Tel. 004-0335-419421 / Fax. 004-0235-419421 www.lmkvs.ro

Concursul Interjudețean de Matematică „Academician Radu Miron” Vaslui, 11-13 noiembrie 2011

Subiecte clasa a VII-a

1. Fie în exteriorul triunghiului ascuțitunghic *ABC*, triunghiurile dreptunghice *ABP* şi *ACT* cu ipotenuzele (*AB*) şi (*AC*). Dacă unghiurile *PAB* şi *TCA* sunt complementare iar *M* este mijlocul lui (*BC*), să se arate că (*PM*) ≡ (*MT*).

2. Arătați că ecuația $x^2 + 67y = 2010$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor întregi.
(G.M.)

3. Fie A o mulțime cu 2011 elemente. Să se arate că există $B = \{x_1, x_2, ..., x_{2010}\} \subset A$, astfel încât: $2^{1005} \times 1005! \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)..........(x_{2009} - x_{2010})$.
(*)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
În situație de egalitate problema notată cu (*) este considerată de departajare.

Liceul Teoretic „Mihail Kogălniceanu”
str. Mihail Kogalniceanu, nr. 19, Vaslui, 730104
Tel. 004-0335-419421 / Fax. 004-0235-419421 www.lmkvs.ro

Concursul Interjudețean de Matematică „Academician Radu Miron”
Vaslui, 11-13 noiembrie 2011

Subiecte clasa a VIII-a

1. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $AB = 2CD$. Dacă M este mijlocul lui $[AB]$, N este mijlocul lui $[BC]$, $AN \cap DM = \{P\}$ şi $AN \cap CM = \{T\}$, determinați valoarea raportului dintre aria triunghiului MPT şi a trapezului $ABCD$.

2. Determinați $n \in$ ¢ pentru care numărul $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ este rațional.

(*)

3. Să se arate că: $xy - 2x - 2y + 5 > 0$, oricare ar fi $x, y \in (1,3)$.

(G.M.)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
În situație de egalitate problema notată cu (*) este considerată de departajare.

Liceul Teoretic „Mihail Kogălniceanu”
str. Mihail Kogalniceanu, nr. 19, Vaslui, 730104
Tel. 004-0335-419421 / Fax. 004-0235-419421 www.lmkvs.ro

Concursul Interjudețean de Matematică „Academician Radu Miron” Vaslui, 11-13 noiembrie 2011

Subiecte clasa a IX-a

1. Fie dreptunghiurile $ABCD$ şi $ABEF$ în plane diferite cu $FB \perp BC$ şi triunghiul AEC este echilateral cu $AC = a\sqrt{2}$. Să se determine:
a) măsura unghiului dintre dreptele FB şi EC;
b) distanța de la punctul B la planul AEC.

2. Să se demonstreze inegalitatea: $\dfrac{x^2}{(x+2y)(x+2z)} + \dfrac{y^2}{(y+2z)(y+2x)} + \dfrac{z^2}{(z+2x)(z+2y)} \geq \dfrac{1}{3}$, oricare ar fi $x, y, z > 0$.

(G.M.)

3. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{2x+1}{x^2+1}\right] \times \left\{\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right\} = \frac{2x-x^2}{x^2+1}$$

[ ] – partea întreagă, {} – partea fracționară (*)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
În situație de egalitate problema notată cu (*) este considerată de departajare.

Liceul Teoretic „Mihail Kogălniceanu”
str. Mihail Kogalniceanu, nr. 19, Vaslui, 730104
Tel. 004-0335-419421 / Fax. 004-0235-419421 www.lmkvs.ro

Concursul Interjudețean de Matematică „Academician Radu Miron”
Vaslui, 11-13 noiembrie 2011

Subiecte clasa a X-a

1. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$. Arătați că $|2011z - 1| + |2011z^2 - z + 2012| \geq 2012$.

2. Fie numerele $a, b, c \in (0,1)$ și $x, y, z \in (0, +\infty)$ astfel încât $a = (bc)^x$, $b = (ca)^y$, și $c = (ab)^z$. Să se arate că:

$$\frac{1}{x+y+2} + \frac{1}{y+z+2} + \frac{1}{z+x+2} \leq 1$$

(G.M.)

3. Fie numerele reale t_1, t_2, t_3, t_4 astfel încât $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 2\pi$ și $\sum_{i=1}^{4} \sin t_i = 0$, $\sum_{i=1}^{4} \cos t_i = 0$. Să se demonstreze că $t_3 - t_1 = t_4 - t_2 = \pi$.

(*)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
În situație de egalitate problema notată cu (*) este considerată de departajare.

Liceul Teoretic „Mihail Kogălniceanu”
str. Mihail Kogalniceanu, nr. 19, Vaslui, 730104
Tel. 004-0335-419421 / Fax. 004-0235-419421 www.lmkvs.ro

Concursul Interjudețean de Matematică „Academician Radu Miron” Vaslui, 11-13 noiembrie 2011

Subiecte clasa a XI-a

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Rezolvați ecuația $X^n=A,\ n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ și $(a_n)_{n\geq 1}$, un șir de numere reale pozitive ce verifică simultan următoarele condiții:
   (i) $a_1\in(0,1)$;
   (ii) $a_{2n+1}^2=2a_{2n-1}-a_{2n-1}^2,\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*$;
   (iii) $a_{2n}=\alpha\cdot\dfrac{1-a_{2n-1}}{\sqrt{1-a_{2n+1}}},\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*$.

   Să se determine α astfel încât șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ să fie convergent.

(G.M.)(*)

3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{[(p-1)x]+[(2p-1)x]+.....+[(np-1)x]}{[(q-1)x]+[(2q-1)x]+.....+[(nq-1)x]}$ unde $x\in\mathbb{R}^*$, $p,q\in\mathbb{N}^*,\ p\neq q$ iar $[\,]$ reprezintă partea întreagă. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
În situație de egalitate problema notată cu (*) este considerată de departajare.

Liceul Teoretic „Mihail Kogălniceanu”
str. Mihail Kogalniceanu, nr. 19, Vaslui, 730104
Tel. 004-0335-419421 / Fax. 004-0235-419421 www.lmkvs.ro

Concursul Interjudețean de Matematică „Academician Radu Miron”
Vaslui, 11-13 noiembrie 2011

Subiecte clasa a XII-a

1. a) Calculați $I = \int \frac{1}{x(x^{2011}+1)}dx,$ unde $x > 0.$

b) Fie $I_n = \int x^n \sqrt{x^2+2011}\,dx$, $n \in N, x \in R.$ Calculați I_0 şi determinați o relație de recurență pentru I_n.

2. Fie $G = (-2, \frac{1}{2})$ şi legea de compoziție $x \Delta y = \frac{6(x+y)+2-7xy}{2(x+y)+9+6xy}$. Să se arate că :

a) $(\forall)x, y \in G \Rightarrow x \Delta y \in G$.

b) (G, Δ) este grup abelian.

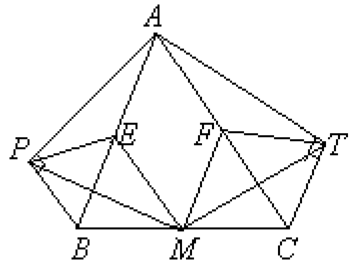
3. Fie $\Delta ABC, C_1$ centrul cercului înscris în $\Delta ABC, C_2$ centrul cercului înscris în ΔABC_1.
Se continuă procedeul astfel încât C_n este centrul cercului înscris în ΔABC_{n-1}. Să se arate că şirul $(C_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se determine limita sa.

(*)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
În situație de egalitate problema notată cu (*) este considerată de departajare.

SOLUȚII

CLASA a VII-a



1. Dacă E şi F sunt mijloacele laturilor (AB) respectiv (AC), avem că $AEMF$ este paralelogram. Întrucât $[PE]$ este mediană în $\triangle APB$, (2p) atunci $(PE) \equiv (EA) \equiv (FM)$, la fel $[TF]$ este mediană în $\triangle ACT$ şi $(TF) \equiv (FA) \equiv (EM)$. (2p)

Dacă unghiurile PAB şi TCA sunt complementare, atunci $\angle(PAB) \equiv \angle(TAC)$. (2p)

Atunci $m\angle(PEB) = 2m\angle(PAB) = m\angle(CFT)$ şi $m\angle(BEM) = m\angle(BAC) = m\angle(CFM)$. Deci $m\angle(PEM) = m\angle(TFM)$, de unde $\triangle PEM \equiv \triangle MFT$ şi $(PM) \equiv (MT)$. (1p)

2. Din relația dată rezultă că $x^2 \vdots 67 \Rightarrow x \vdots 67$ (2p)

Deci $x = 67k,\ k \in \mathbb{Z}$ (2p)

$67^2 \times k^2 + 67y = 30 \times 67$ (2p)

$67 \times k^2 + y = 30,\ k \in \mathbb{Z}$ deci ecuația are o infinitate de soluții întregi. (1p)

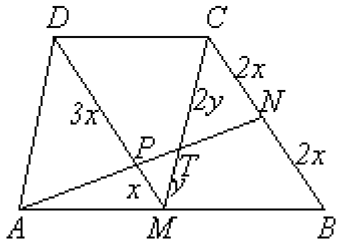
3. Din principiul cutiei observăm că printre cele 2011 elemente ale lui A există două care dau aceleși rest la împărțirea prin 2010; fie x_1, x_2 aceste elemente. Deducem că $2010 \mid (x_1 - x_2)$ (1). (2p)

Pe același principiu, printre cele 2009 elemente ale mulțimii $A - \{x_1, x_2\}$ există două care dau același rest la împărțirea prin 2008; fie x_3, x_4 aceste elemente. Deducem că $2008 \mid (x_3 - x_4)$ (2). (2p)

Similar, la ultimul pas avem că printre cele 3 elemente ale mulțimii $A - \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{2008}\}$ există două cu diferența divizibilă cu 2, deci $2 \mid (x_{2009} - x_{2010})$ (1005). (2p)

Astfel, înmulțind relațiile (1), (2), …….,(1005) obținem că $(2 \times 4 \times 6 \times \ldots\ldots 2010) \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots\ldots\ldots(x_{2009} - x_{2010})$. (1p)

CLASA a VIII-a



1. Pentru că M este mijlocul lui $[AB]$ şi $AB = 2CD$, patrulaterele $AMCD$ şi $MBCD$ sunt paralelograme, (2p)

cu $A_{[AMD]} = A_{[DMC]} = A_{[MBC]} = \frac{1}{3} A_{[ABCD]}$. (1p)

Pentru că $MP \| BN$ avem $\Delta AMP \sim \Delta ABN \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MP}{BN} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow BN = 2MP$ şi $DP = 3x$. (2p)

Pentru că $MP \| NC$ avem $\Delta MTP \sim \Delta CTN \Rightarrow \frac{MP}{CN} = \frac{MT}{TC} = \frac{1}{2} \Rightarrow TC = 2MT$.

$$A_{[MPT]} = \frac{MP \times MT \times \sin\angle(PMT)}{2} = \frac{\frac{1}{4} \times MD \times \frac{1}{3} \times MC \times \sin\angle(PMT)}{2} = \frac{MD \times MC \times \sin\angle(PMT)}{24} =$$

$$\frac{1}{12} \times A_{[DMC]} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} = \frac{1}{36} \times A_{[ABCD]} .$$ (2p)

2. Fie $a,b \in$ ¥ cu b nenul și (a,b)=1, astfel încât $\frac{4n-2}{n+5} = \frac{a^2}{b^2}$. (2p)

Atunci $a^2 n + 5a^2 = 4b^2 n - 2b^2$ de unde rezultă că : $n = -5 + \frac{22b^2}{4b^2 - a^2}$. (2p)

Cum $n \in$ ¢, trebuie ca $(4b^2 - a^2) | 22b^2$, ceea ce împreună cu faptul că $(b^2, 4b^2 - a^2) = 1$, implică $(4b^2 - a^2) | 22$. Mai mult, $4b^2 - a^2$ este un număr de forma 4k sau 4k+3, deci $4b^2 - a^2 \in \{-1, 11\}$. (2p)

Dacă $4b^2 - a^2 = -1$, obținem b=0, ceea ce este imposibil. Deci $4b^2 - a^2 = 11$, de unde a=5, b=3, iar n=13. (1p)

3. Relația dată se scrie $(x-2)(y-2)+1 > 0$. (2p)

Din $x \in (1,3)$ rezultă că $-1 < x-2 < 1 \Rightarrow |x-2| < 1$.

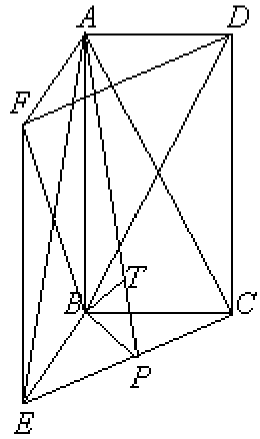
Din $y \in (1,3)$ rezultă că $-1 < y-2 < 1 \Rightarrow |y-2| < 1$. (2p)

Deci $0 < |x-2| \times |y-2| < 1$. (2p)

$0 < |(x-2) \times (y-2)| < 1$ de unde rezultă concluzia. (1p)

CLASA a IX-a

1. Întrucât $FB \perp BC$ şi $AB \perp BC$ avem $BC \perp (ABE)$, de unde $BC \perp BE$. (1p)



Pentru că triunghiul AEC este echilateral avem

$AB^2 + BE^2 = BE^2 + BC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow$

$AB = BC = BE = a$, de unde $ABCD$ şi $ABEF$ sunt pătrate. (2p)

Pentru că $DC \parallel FE$ şi $DC = EF = a$, atunci $DCEF$ este dreptunghi şi $FD \parallel EC$. (1p)

Măsura unghiului $m\angle(FB, EC) = m\angle(DFB)$.

Întrucât triunghiul FBD este echilateral $m\angle(FB, EC) = m\angle(DFB) = 60^0$. (1p)

Dacă P este mijlocul segmentului $[EC]$ avem $EC \perp BP$ şi $EC \perp AB$, atunci $EC \perp (ABP)$ şi $(AEC) \perp (ABP)$. (1p)

Dacă $BT \perp AP \Rightarrow BT \perp (AEC)$. Pentru că $AB \perp BE$ şi $AB \perp BC$ rezultă $AB \perp BP$.

Din triunghiul dreptunghic ABP, avem $BT = \dfrac{AB \times BP}{AP} = \dfrac{a \times \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (1p)

2. Aplicând Titu Andriescu: $\sum \dfrac{x^2}{(x+2y)(x+2z)} \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+8(xy+yz+zx)}$. (3p)

Este suficient să demonstrăm că: $\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+8(xy+yz+zx)} \geq \dfrac{1}{3}$ (1p) $\Leftrightarrow$ calcule $\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (2p) $\Leftrightarrow$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ (A) (1p)

3. $\left[\dfrac{2x+1}{x^2+1}\right] \times \left\{1+\dfrac{2x+1}{x^2+1}\right\} = \dfrac{2x+1}{x^2+1} - 1$ (2p)

$\left[\dfrac{2x+1}{x^2+1}\right] \times \left\{\dfrac{2x+1}{x^2+1}\right\} = \dfrac{2x+1}{x^2+1} - 1$ (1p)

$\dfrac{2x+1}{x^2+1} = y$, $[y] \times \{y\} = y - 1$ (1p)

$[y] \times (y - [y]) = y - 1$, ……, $([y]-1) \times (y - [y] - 1) = 0$,

$([y]-1) \times (\{y\}-1) = 0$, $y \in \mathbb{R} \rightarrow \{y\} \in [0,1)$ (2p)

Deci $[y] = 1$.

$1 \leq \dfrac{2x+1}{x^2+1} < 2$, $x^2+1 \leq 2x+1 < 2x^2+2$, $x^2 \leq 2x$ și $2x^2-2x+1 > 0$

Deci $x \in [0,2]$ (1p)

CLASA a X-a

1. $\left|2011z-1\right|=\left|1-2011z\right|=$ (1p)

$\left|z\right|\times\left|1-2011z\right|=\left|z-2011z^2\right|$ (2p)

Se aplică $\left|u\right|+\left|v\right|\geq\left|u+v\right|,\ (\forall)\ u\in\mathbb{C},v\in\mathbb{C}$ (1p)

$\left|2011z-1\right|+\left|2011z^2-z+2012\right|=\left|z-2011z^2\right|+\left|2011z^2-z+2012\right|\geq$

$\geq\left|z-2011z^2+2011z^2-z+2012\right|=2012$ (3p)

2. Fie $\alpha\in(0,1)$. Atunci: $x=\dfrac{\log_\alpha a}{\log_\alpha b+\log_\alpha c}$, $y=\dfrac{\log_\alpha b}{\log_\alpha c+\log_\alpha a}$, $z=\dfrac{\log_\alpha c}{\log_\alpha a+\log_\alpha b}$ (1p)

$$x+y+2=\frac{\log_\alpha a}{\log_\alpha b+\log_\alpha c}+1+\frac{\log_\alpha b}{\log_\alpha c+\log_\alpha a}+1=$$

$$=(\log_\alpha a+\log_\alpha b+\log_\alpha c)\left(\frac{1}{\log_\alpha b+\log_\alpha c}+\frac{1}{\log_\alpha c+\log_\alpha a}\right)$$

$$\frac{1}{x+y+2}=\frac{1}{\log_\alpha a+\log_\alpha b+\log_\alpha c}\times\frac{1}{\dfrac{1}{\log_\alpha b+\log_\alpha c}+\dfrac{1}{\log_\alpha c+\log_\alpha a}}$$ (2p)

$$\sum\frac{1}{x+y+2}=\frac{1}{\log_\alpha a+\log_\alpha b+\log_\alpha c}\times\sum\frac{1}{\dfrac{1}{\log_\alpha b+\log_\alpha c}+\dfrac{1}{\log_\alpha c+\log_\alpha a}}$$ (1p)

Dar: $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\dfrac{a+b}{2}\quad(\forall)\ a,b>0\Rightarrow\ \dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\dfrac{a+b}{4}$ (2p)

Avem:

$$\sum\frac{1}{x+y+2}\leq\frac{1}{\log_\alpha a+\log_\alpha b+\log_\alpha c}\left(\frac{\log_\alpha b+2\log_\alpha c+\log_\alpha a}{4}+\frac{2\log_\alpha a+\log_\alpha b+\log_\alpha c}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\log_\alpha a+2\log_\alpha b+\log_\alpha c}{4}\right)=1$$ (1p)

3. Fie $A_i(\cos t_i,\sin t_i),\ i=\overline{1,4}$ și vectorii $\overline{v_i}=\overline{OA_i}$. (1p)

Din ipoteză rezultă că $\sum_{i=1}^{4}\overline{v_i}=\overline{0}$ iar $\left|\overline{v_i}\right|=1,\ i=\overline{1,4}$ (1p)

Fie $\overline{v_1}+\overline{v_2}=\overline{OM}\neq\overline{0}$ și $\overline{v_3}+\overline{v_4}=\overline{ON}\neq\overline{0}$ cu $\overline{OM}+\overline{ON}=\overline{0}$

(1p)

$[OA_1MA_2]$ și $[OA_3NA_4]$ sunt romburi cu latura 1 și diagonalele OM și ON în prelungire (1p)

$\Delta OA_2M\equiv\Delta OA_4N\ (L.L.L.)\Rightarrow\ \sphericalangle MOA_2\equiv\sphericalangle NOA_4$ (1p)

Cum M-O-N coliniare rezultă A_2-O-A_4 coliniare deci $t_4-t_2=\pi$

Analog $t_3-t_1=\pi$ (1p)

$\overline{v_1}+\overline{v_2}\neq\overline{0}$ reducere la absurd.

Presupunem $\overline{v_1} + \overline{v_2} = \overline{0} \Rightarrow \overline{v_3} + \overline{v_4} = \overline{0}$

$t_2 = t_1 + \pi > \pi , t_4 = t_3 + \pi , t_3 > t_2 > \pi \Rightarrow t_4 > 2\pi$ contradicție .

1. $X^n = A \Rightarrow AX = XA \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ (2p)

Dar $X = aI_3 + \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aI_3 + B$; I_3 comută cu B

$\Rightarrow X^n = (aI_3 + B)^n = C_n^0 (aI_3)^n + C_n^1 (aI_3)^{n-1} B + C_n^2 (aI_3)^{n-2} B^2$, deoarece $B^k = O_3, \ (\forall) k \geq 3$

$\Rightarrow X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{2} 3b^2 \\ 0 & a^n & 3a^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$ (2p)

$\Rightarrow a^n = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1p)

Deci ecuația are soluții dacă și numai dacă n=1, deci X=A. (1p)

2. Din (i) avem $0 < a_1 < 1$

Din (ii) pentru n=1 avem $a_3^2 = 2a_1 - a_1^2 = 1 - (a_1 - 1)^2 < 1$ și $a_3^2 = a_1(2 - a_1) > 0, \ a_3 > 0$

$\Rightarrow a_3 \in (0,1)$ (1p)

Prin inducție se demonstrează că $(a_{2n+1})_{n \geq 1}$ șir mărginit($\in (0,1)$) și (1p)

$a_{2n+1}^2 - a_{2n-1}^2 = 2a_{2n-1} - 2a_{2n-1}^2 = 2a_{2n-1}(1 - 2a_{2n-1}) > 0 \Rightarrow (a_{2n+1})_{n \geq 1}$ crescător (1p)

deci $(a_{2n+1})_{n \geq 1}$ convergent deci există $\lim\limits_{n \to \infty} a_{2n+1} = l_1 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow l_1^2 = 2l_1 - l_1^2 \Rightarrow l_1 = 1$

(șir crescător) (2p)

(ii) $\Rightarrow -a_{2n+1}^2 = -2a_{2n-1} + a_{2n-1}^2 \,|+1 \Rightarrow 1 - a_{2n+1}^2 = (1 - a_{2n-1})^2 \Rightarrow \sqrt{1 - a_{2n+1}} \cdot \sqrt{1 + a_{2n+1}} = 1 - a_{2n-1}$ și cu relația (iii) obținem $a_{2n} = \alpha \cdot \sqrt{1 + a_{2n+1}}$ (1p)

(a_n) convergent $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} a_{2n+1} \Leftrightarrow l_2 = \alpha\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1p)

3. $a_n = \dfrac{[(p-1)x] + [(2p-1)x] + \ldots.. + [(np-1)x]}{[(q-1)x] + [(2q-1)x] + \ldots.. + [(nq-1)x]}$

Notăm $b_n = [(p-1)x] + [(2p-1)x] + \ldots.. + [(np-1)x]$ și $c_n = [(q-1)x] + [(2q-1)x] + \ldots.. + [(nq-1)x]$

$(p-1)x - 1 < [(p-1)x] \leq (p-1)x$

……………………………………

$(np-1)x - 1 < [(np-1)x] \leq (np-1)x$ (2p)

Se adună relațiile:

$\frac{n(np + p - 2)}{2} x - n \leq b_n \leq \frac{n(np + p - 2)}{2} x$,

$\frac{np + p - 2}{2n} x - \frac{1}{n} \leq \frac{b_n}{n^2} \leq \frac{np + p - 2}{2n} x \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{p}{2}$ (1p)

Analog $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n^2}=\frac{q}{2}$ (3p)

Deci $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{p}{q}$ (1p)

Clasa a XII-a

Subiectul I

a) Calculați $I = \int \frac{1}{x(x^{2011}+1)}\,dx,\ x>0$.

b) Fie $I_n = \int x^n \sqrt{x^2+2011}\,dx,\ n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Calculați I_0 și determinați o relație de recurență pentru I_n.

Barem:

a) Se amplifică $\frac{1}{x(x^{2011}+1)}$ cu x^{2010} și $u(x)=x^{2011}$ (2p)

Finalizare (1p)

b) $I_n = \int x^n \cdot \frac{x^2+2011}{\sqrt{x^2+2011}}\,dx = \int x^{n+1}(\sqrt{x^2+2011})'\,dx + 2011\int x^{n-1}\cdot(\sqrt{x^2+2011})'\,dx =$

$= \ldots = (x^{n+1}+2011x^{n-1})\sqrt{x^2+2011} - (n+1)I_n - 2011(n-1)I_{n-2}$ (2p) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (n+2)I_n + 2011\cdot(n-1)I_{n-2} = (x^{n+1}+2011x^{n-1})\sqrt{x^2+2011} + C,\ n \geq 2$ (1p)

$I_0 = \int\sqrt{x^2+2011}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2011} + \frac{2011}{2}\cdot \ln(x+\sqrt{x^2+2011}) + C$ (1p)

Clasa a XII-a

Subiectul al II-lea

Fie $G=\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ și legea de compoziție $x\Delta y=\frac{6(x+y)+2-7xy}{2(x+y)+9+6xy}$

a) Să se arate că $(\forall)x,y\in G \Rightarrow x\Delta y\in G$.

b) Să se arate că (G,Δ) grup abelian.

Barem:

a) $(\forall)x,y\in G \Rightarrow x+2>0, y+2>0, 1-2x>0, 1-2y>0$

$$x\Delta y=\frac{(x+2)(y+2)-2(1-2x)(1-2y)}{2(x+2)(y+2)+(1-2x)(1-2y)}=-2+\frac{5(x+2)(y+2)}{2(x+2)(y+2)+(1-2x)(1-2y)} \quad (1p)$$

$x\Delta y>-2$

$$x\Delta y<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{5(x+2)(y+2)}{2(x+2)(y+2)+(1-2x)(1-2y)}<\frac{5}{2}\Leftrightarrow(1-2x)(1-2y)>0 \quad (1p)$$

b) (C) $x\Delta y=y\Delta x$ $(\forall)x,y\in G$ (1p)

(A) $(x\Delta y)\Delta z=x\Delta(y\Delta z)$ $(\forall)x,y,z\in G$ (2p)

$$(x\Delta y)\Delta z=-2+\frac{5(x\Delta y+2)(z+2)}{2(x\Delta y+2)(z+2)+(1-2\cdot x\Delta y)(1-2z)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\Delta y+2=\dfrac{5(x+2)(y+2)}{2(x+2)(y+2)+(1-2x)(1-2y)} \\ 1-2\cdot x\Delta y=\dfrac{5(1-2x)(1-2y)}{2(x+2)(y+2)+(1-2x)(1-2y)} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x\Delta y)\Delta z=-2+\frac{5(x+2)(y+2)(z+2)}{2(x+2)(y+2)(z+2)+(1-2x)(1-2y)(1-2z)}$$

Analog $x\Delta(y\Delta z)$.

(EN.) $(\exists)e\in G$ a.î. $x\Delta e=x$ $(\forall)x\in G$.

$e=-\frac{1}{3}\in G$ (1p)

(ES) $(\forall)x\in G$ $(\exists)x'\in G$ a.î. $x\Delta x'=x'\Delta x=e$ $(\forall)x\in G$ (1p)

$x'=\frac{4x+3}{3x-4}$; $x\in G\Rightarrow x\neq\frac{4}{3}$

$x'\in G$

clasa a XII-a

Subiectul III

Fie $\triangle ABC$, C_1 centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, C_2 centrul cercului înscris în $\triangle ABC_1$. Se continuă procedeul astfel încât C_n este centrul cercului înscris în $\triangle ABC_{n-1}$. Să se arate că șirul $(C_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se determine limita sa.

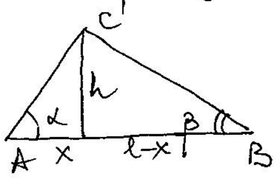
Soluție

$\mu(\widehat{C_1AB}) = \frac{A}{2}$, $\mu(\widehat{C_1BA}) = \frac{B}{2}$

$\mu(\widehat{C_2AB}) = \frac{A}{2^2}$, $\mu(\widehat{C_2BA}) = \frac{B}{2^2}$ (1p)

$\mu(\widehat{C_nAB}) = \frac{A}{2^n}$, $\mu(\widehat{C_nBA}) = \frac{B}{2^n}$

În caz general:



$\frac{x}{h} = \operatorname{ctg}\alpha$, $\frac{l-x}{h} = \operatorname{ctg}\beta$

$\frac{l}{h} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$

$h = \frac{l\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $x = h\operatorname{ctg}\alpha = \frac{l\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

(2p)

În cazul $\triangle ABC_n$: $h_n = \frac{AB \cdot \sin\frac{A}{2^n} \cdot \sin\frac{B}{2^n}}{\sin\frac{A+B}{2^n}}$

$\lim_{n\to\infty} h_n = AB \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{A\cdot B}{A+B} \cdot \frac{1}{2^n} = 0$ (2p)

$C_n \in (AB)$

$x_n = AC_n = AB\frac{\sin\frac{B}{2^n} \cdot \cos\frac{A}{2^n}}{\sin\left(\frac{A+B}{2^n}\right)}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = AB \cdot \frac{B}{A+B}$ (2p)

$\lim_{n\to\infty} C_n = C_0 \in (AB)$ a.î. $\frac{AC_0}{C_0B} = \frac{B}{A}$