CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU - DAN BARBILIAN”

Ediţia a XVI-a, Călăraşi, 28-30 octombrie 2011

Clasa a V–a

Problema 1. Determinaţi cifrele a, b, c astfel încât:

a) $\overline{43aa}-\overline{bbc9}=2011;$

b) $\overline{aaa}+\overline{acb}+2\cdot\left(\overline{aba}+\overline{abb}\right)=2011;$

Aurelia Caţaros, Călărași

Problema 2. Numerele naturale sunt aranjate, în ordine crescătoare, într-un triunghi ca în figura alăturată. Care este cel mai mic număr din linia care conține numărul 2011? Justifică răspunsul.

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 …

Adriana Constantin, Călărași

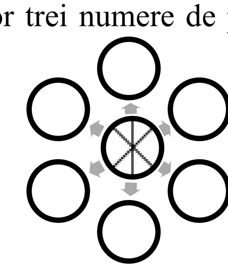
Problema 3. Într-un bazin de înot sunt 19 fete și 16 băieți, iar pe marginea bazinului sunt mai mulți copii, băieți și fete. La terminarea lecției de înot instructorul stabilește că din bazin ies câte doi copii și intră înapoi unul. Numim pas această secvență, după regulile următoare:

1) Dacă ies doi băieți sau două fete intră în bazin un băiat;
2) Dacă ies din bazin un băiat și o fată, intră în bazin o fată.

a) Câte fete și câți băieți rămân în bazin după 32 de pași? (scrie care sunt toate situațiile posibile și justifică răspunsul)
b) Se poate stabili dacă ultimul copil rămas în bazin este băiat sau fată? Justifică răspunsul.

Sorin Furtună, Călărași

Problema 4. Fiecare dintre numerele 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014 trebuie scris, câte unul în fiecare din cercurile diagramei alăturate, astfel încât suma celor trei numere de pe fiecare din cele trei linii indicate în diagramă să fie aceeași.
Care din cele șapte numere poate fi scris în cercul din mijloc?
Justifică răspunsul cu diagrama completată cu cele 7 numere pentru fiecare caz posibil.



Viorica Stoianovici, Călărași

Clasa a VI – a

Problema 1. a) Determinaţi cifrele a, b, c astfel încât numărul $\overline{abc}$ împărțit la numărul $\overline{bc}$ dă câtul și restul egale cu 14.

b) Determinați numerele prime a și b care verifică relația: $a^2+b^2+2a+2b=43.$

Problema 2. a) Se dă numărul natural $121221222122221\ldots1\underbrace{222\ldots2}_{2011\text{ cifre}}$. A câta cifră a numărului este a douăzecea cifră de 1?

b) Arătați că suma numerelor de forma $\overline{abcc}$, care verifică relația $\frac{\overline{abcc}-\overline{abc}}{\overline{c0}}=181$, este divizibilă cu 2011.

Luminița Bucureșteanu și Eugen Predoiu, Călărași

Problema 3. a) Care este numărul minim de puncte pe care trebuie să-l conțină o mulțime pentru ca prin ele să treacă exact 13 drepte (prin două puncte distincte trece o singură dreaptă). Justifică răspunsul printru-n desen.

b) Fie P o mulțime de puncte. O dreaptă se numește *barbiliană* dacă trece exact prin patru puncte din mulțime. În figura 1 sunt desenate 16 puncte și prin ele, așa cum vedeți în figura 2, trec 10 drepte *barbiliene*. Câte drepte *barbiliene* trec prin 36 de puncte dacă ele sunt amplasate ca în figura 3.

figura 1 figura 2 figura 3

Viorica Stoianovici, Călărași

Problema 4. Un program de calculator scrie numerele naturale, în ordine crescătoare, într-un triunghi ca în figura alăturată. Rândurile cu un număr de ordine impar (*Rândul 1, Rândul 3, etc.)* sunt colorate în roșu iar celelalte în albastru. Aflați:

Rândul 1	1							
Rândul 2	2	3						
Rândul 3	4	5	6	7				
Rândul 4	8	9	10	11	12	13	14	15
………………								

a) Ce culoare are numărul 2011?

b) Câte numere s-au scris, până la 2011 inclusiv, cu roșu și câte cu albastru?

Justifică răspunsurile.

Adriana Olaru, Călărași

Clasa a VII – a

Problema 1. Fie ΔABC și punctele $D,\ E,\ F,\ G \in BC$ astfel încât $B \in (CF),\ C \in (BG),\ AD \perp BC,\ D \in (BE),\ \widehat{BAE} \equiv \widehat{CAE}$ și $m\left(\widehat{DAE}\right) = 10°$. Dacă bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABF}$ și $\widehat{ACG}$ se intersectează în punctul H și $m\left(\widehat{BHC}\right) = 60°$ determinați măsurile unghiurilor ΔABC.

Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

Problema 2. a) Să se arate că oricum am alege cinci numere întregi, există două dintre acestea, care au suma sau diferența divizibile cu 7.

ViitoriOlimpici.ro

c) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este un număr par şi $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot n$, să se arate că numărul $A = n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ \frac{1}{n}\right)$ divizibil cu numărul $n+1$.

Lucian Ioniță, Călăraşi

Problema 3. În paralelogramul $ABCD$ se notează cu M şi N picioarele perpendicularelor duse din C pe bisectoarea interioară respectiv exterioară a unghiului ABC. De asemenea se notează cu P şi Q picioarele perpendicularelor duse din D pe bisectoarea interioară respectiv exterioară a unghiului BAD.

a) Arătaţi că punctele $M,\ N,\ P$ şi Q sunt coliniare.

b) Demonstraţi că dreptele AC, BD şi NQ sunt concurente.

c) Fie O punctul de concurenţă al dreptelor AC, BD şi NQ. Să se demonstreze că dacă $ABCD$ este romb, atunci O este centrul de greutate al triunghiurilor NDA şi QBC.

Relu Ciupea, Olteniţa

Problema 4. La sfârșitul campionatului, fiecare echipă de fotbal din Liga 1, încasează o sumă de bani ca urmare a vânzării drepturilor de televizare a meciurilor. Suma de bani primită depinde de locul ocupat în clasament, la sfârșitul campionatului. Echipa clasată pe locul k, $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 18\}$ obține suma s_k astfel încât raportul $\frac{s_k}{s_k - k + 19}$ este același pentru fiecare echipă. Câți bani a primit echipa de pe locul întâi, dacă suma de bani repartizată a fost de 17 100 000 de euro?

Viorica Stoianovici, Călărași

Clasa a VIII – a

Problema 1. a) Dacă lungimea înălțimii unui trapez isoscel este l și aria trapezului este l^2 demonstrați că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

b) Fie $ABCD$ un paralelogram, M mijlocul lui AB, N mijlocului CD, $BD \cap AN = \{E\}$, $BD \cap CM = \{F\}$ și $AD \cap CM = \{G\}$. Aflaţi raportul ariilor suprafeţelor [GDC] şi [AME].

Aurelia Caţaros şi Gabriela Ruse, Călăraşi

Problema 2. a) Fie x și y două numere reale pozitive astfel încât $x+y+xy=3$. Arătați că $x+y \geq 2$.

b) Să se demonstreze că:
$$\frac{x^2+x+1}{(x-y)(x-z)(x+y+1)(x+z+1)}+\frac{y^2+y+1}{(y-z)(y-x)(y+z+1)(y+x+1)}+$$
$$+\frac{z^2+z+1}{(z-x)(z-y)(z+x+1)(z+y+1)}=0;\ \forall x,y,z \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\},\quad x\neq y,\ y\neq z,\ x\neq z.$$

Tudor Victor, Călăraşi

Problema 3. a) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se defineşte $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, $b_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ şi $c_n = \frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{3}+\frac{b_3}{4}+\cdots+\frac{b_n}{n+1}$. Arătaţi că $c_{2010} = b_{2011} - 2011$.

Cristina Bornea, Călărași

b) Fie pătratele $ABCD$ și $ABEF$, $AB=l$, $l>0$ și punctul $M \in AC$, astfel încât $A \in (MC)$, și $AM = AB$. Perpendiculara în B pe MB intersectează AC în N, iar paralela prin N la MB intersectează AD în P. Dacă S este piciorul perpendicularei din N pe BC arătați că $PF = 2 \cdot BS$.

Sorin Furtună, Călăraşi

Problema 4. a) Primul număr dintr-un șir este 2 și al doilea 6. Următoarele numere se obțin împărțind ultimul număr din șir la precedentul. Care este suma primelor 2011 numere ale șirului?

Ion Cheșcă, Lehliu Gară

b) La un congres la care participă 2011 delegați sunt exact 4020 de perechi de persoane care se cunosc unul cu celălalt. Arătați că există un delegat care cunoaște cel mult alți trei delegați.

Adriana Constantin, Călărași