Concursul Național de Matematică “Arhimede”

Ediția a IX-a, Etapa I - 19 noiembrie 2011

Clasa a VII-a

I. *(9p)* Într-un cartier sunt două magazine concurente. La un moment dat, un anumit obiect are același preț în cele două magazine. După un timp, prețul acelui obiect este mărit cu 10% în primul magazin și este micșorat cu 10% în cel de-al doilea magazin. La o nouă revizuire de prețuri, costul aceluiași produs se micșorează cu 10% în primul magazin și este mărit cu 10% în cel de-al doilea magazin. Să se stabilească în care magazin costă mai mult acest obiect, în final.

Prof. Niculaie Marin Goșoniu

II. *(4p)* 1. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că ecuația:

$$\frac{x}{2\cdot 7}+\frac{x}{7\cdot 12}+\cdots+\frac{x}{(5k-3)(5k+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

nu are soluții în $\mathbb{N}$.

(5p) 2. Demonstrați că:

$$2<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{15}<3$$

III. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0$ și $AB=2AC$. Dacă d este mediatoarea lui $[AB]$, $MD\cap AC=\{P\}$ și $d\cap BC=\{E\}$ unde M este mijlocul lui $[AB]$ iar $MD\perp BC, D\in(BC)$;

(4p) a) Aflați $m(\sphericalangle CME)$;

(5p) b) Demonstrați că $(CT)\equiv(TP)$, unde $CM\cap BP=\{T\}$.

Prof. Cristina Godeanu

IV. Fie $\Delta\, ABC$ și punctele $A_1\in(BC), A_2\in(A_1C), B_1\in(AC), B_2\in(B_1A), C_1\in(AB), C_2\in(C_1B)$, astfel încât patrulaterele $A_1B_1B_2C_2$ și $A_2B_1C_1C_2$ să fie paralelograme. Demonstrați că:

(4p) a) $A_1A_2B_2C_1$ este un paralelogram;

(5p) b) $MNPQ$ este un paralelogram, unde :

$$A_2C_2\cap A_1C_1=\{M\},\quad A_1B_1\cap A_2B_2=\{N\},\quad B_1C_1\cap A_2B_2=\{P\},\quad B_2C_2\cap A_1C_1=\{Q\}.$$

Prof. Traian Preda

<u>Notă</u>: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore . Fiecare problemă se punctează de la 1 la 10 și primește 1 p din oficiu.