

EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

Etapa I – 15.10.2011

Barem de corectare și notare

Clasa a XII-a M1

Subiectul I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	C	E	E	A	B	A	A	E	A	C

Subiectul II

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de puncte, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3 + 1} - n\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3}) \quad (1 \text{ p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1} + n\sqrt{n}} \quad (1 \text{ p}) = 0 \quad (1 \text{ p}).$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{2x + 5}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5})} \quad (1 \text{ p})$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} \quad (1 \text{ p}) = \frac{1}{2} \quad (1 \text{ p}).$

3. $f'(x) = (2x + x^2 + a)e^x \quad (1 \text{ p}). \quad f'(0) = a \quad (1 \text{ p}), \text{ deci } a = 3 \quad (1 \text{ p}).$

4. $f'(x) = e^x + 3x^2 - 6x + 3 = e^x + 3(x - 1)^2 \quad (2 \text{ p}).$ Deoarece derivata este pozitivă, rezultă cerința. **(1 p).**

5. $f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} \quad (1 \text{ p}) \quad f''(x) = \frac{2}{(\sqrt{x^2 + 2x + 3})^3} \quad (1 \text{ p}).$ Deoarece

derivata a doua este pozitivă, rezultă cerința. **(1 p).**

6. Cazul de nedeterminare este $\frac{0}{0} \quad (1 \text{ p}). \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad (1 \text{ p}).$ Limita cerută este egală cu $\frac{1}{2} \quad (1 \text{ p}).$

7. $\lim_{x \searrow 1} \frac{\ln x + \sin x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{\ln x + \sin x}{(x - 1)^2} = \frac{0 + \sin 1}{+0} = +\infty \quad (2 \text{ p}).$ Dreapta de ecuației $x = 1$ este asimptota verticală a graficului **(1 p).**

$$8. AB = \begin{pmatrix} a+6 & b+3 \\ 2a+2 & 2b+1 \end{pmatrix} \text{ (1 p). } BA = \begin{pmatrix} a+2b & 3a+b \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ (1 p).}$$

$$AB = BA \Rightarrow a=1, b=3 \Rightarrow A = B \text{ (1 p).}$$

9. Determinantul sistemului este 0 (1 p). Un minor principal este $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, iar cel caracteristic

$$\text{este } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (1 p). Rezultă cerința (1 p).}$$

10. $\det A = a, \det A^3 = \det I_3 = 1$ (1 p). Atunci $\det A^3 = (\det A)^3 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$ (1 p).

$$\text{Obținem } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ care verifică } A^3 = I_3. \text{ (1 p).}$$

Subiectul III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

$$1. \text{ Avem } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{2x} \text{ (1 p)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{x^2} + \frac{\sin x}{2x} \right) \text{ (0,5p)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (0,5p).}$$

$$2. \text{ Avem } f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x^2 + x + 2)^2} \text{ (0,5 p). Derivata se anulează în punctele } x = -3 \pm 2\sqrt{2} \text{ (0,5 p).}$$

$$\text{Cum } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1, f(-3 \pm 2\sqrt{2}) = \frac{2 \mp 4\sqrt{2}}{7} \text{ (0,5p), din monotonia funcției rezultă}$$

$$f(\mathbb{R}) = \left[\frac{2-4\sqrt{2}}{7}, \frac{2+4\sqrt{2}}{7} \right], \text{ adică } f \text{ este mărginită (0,5 p).}$$

3. Demonstrăm prin inducție că $x_n \leq \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n = 1$, afirmația este evidentă (0,5 p).

Presupunând afirmația adevărată pentru un n , rezultă $x_{n+1} = x_n^3 + \frac{x_n}{2} \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, deci șirul

este mărginit (0,5 p). Cum șirul are toți termenii pozitivi, din $x_{n+1} - x_n = x_n^3 - \frac{x_n}{2} =$

$$= x_n \left(x_n^2 - \frac{1}{2} \right) < 0, n \geq 1, \text{ rezultă că șirul este descrescător (0,5 p).}$$

Limita L verifică $L^3 = \frac{L}{2} \Rightarrow L \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. Din $x_n \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$ deducem $L = 0$ (0,5 p).

4. Din ipoteză avem $\sigma(\sigma(1)) = 4, \sigma(\sigma(2)) = 1, \sigma(\sigma(3)) = 3, \sigma(\sigma(4)) = 2$. **(0,5 p)**.
 Dacă $\sigma(1) = 1$, atunci $4 = \sigma(1) = 1$, fals. Dacă $\sigma(1) = 3$, atunci $4 = \sigma(3) \Rightarrow \sigma(4) = 3 = \sigma(1)$, fals. Dacă $\sigma(1) = 4$, atunci $4 = \sigma(4) = \sigma(1)$, fals. **(1 p)**. Dacă $\sigma(1) = 2$, atunci $4 = \sigma(2) \Rightarrow \sigma(4) = 1 \Rightarrow \sigma(3) = 3$, deci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^3 = e$ **(0,5 p)**.
5. Avem $\det A = (b-a)(1-a)(b-1)$. **(1 p)**. Cum $a, b \neq 1$ avem echivalența $\det A = 0 \Leftrightarrow a = b$, de unde (prin negație) rezultă cerința **(1 p)**.

- **Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.**