MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII
Concursul de ocupare a posturilor / catedrelor vacante în învăţământul preuniversitar
Probă scrisă la MATEMATICĂ
18-19 iulie 2005 **Varianta 1**

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 4 ore.

SUBIECTUL I (20p)

Se consideră mulţimea $G = \mathbf{Q} \cap (0,\infty)$ şi o funcţie $f : \mathbf{Q} \to G$, care verifică relaţia $f(x+y) = f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y \in \mathbf{Q}$.

(4p) **a)** Să se arate că $f(0) = 1$.

(4p) **b)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Q}$, avem $f(a_1 + a_2 + ... + a_n) = f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot ...\cdot f(a_n)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbf{Q}$.

(2p) **d)** Să se arate că există o funcţie surjectivă $g : G \to \mathbf{Q}$, care verifică relaţia $g(x\cdot y) = g(x) + g(y),\ \forall x,y \in \mathbf{Q}$.

(2p) **e)** Să se arate că între mulţimile nevide A şi B există o funcţie injectivă $\alpha : A \to B$, dacă şi numai dacă există o funcţie surjectivă $\beta : B \to A$.

(2p) **f)** Să se dea un exemplu de două grupuri $(K,\circ)$ şi $(H,*)$, cu proprietatea că **există** un morfism surjectiv de grupuri $\mu : K \to H$ şi **nu există** un morfism injectiv de grupuri $\nu : H \to K$.

(2p) **g)** Să se dea un exemplu de două grupuri $(K,\circ)$ şi $(H,*)$, cu proprietatea că **există** un morfism injectiv de grupuri $\mu : K \to H$ şi **nu există** un morfism surjectiv de grupuri $\nu : H \to K$.

SUBIECTUL II (20p)

Se consideră un triunghi ascuţitunghic *ABC*. Pe laturile sale se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD, BCE şi ACF. Notăm cu T $(T \neq B)$, punctul de intersecţie dintre cercurile circumscrise triunghiurilor *ABD* şi *BCE*.

(3p) **a)** Să se arate că $m\left(\widehat{BTA}\right) = m\left(\widehat{BTC}\right) = m\left(\widehat{ATC}\right) = 120^\circ$.

(4p) **b)** Să se arate că punctul T se află pe cercul circumscris triunghiului ACF.

(4p) **c)** Să se arate că punctele D, T şi C sunt coliniare.

(2p) **d)** Să se arate că, $MP \cdot NQ \le MN \cdot PQ + MQ \cdot NP$, dacă $MNPQ$ este un patrulater convex, iar când patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil inegalitatea devine egalitate.

(2p) **e)** Să se arate că $DT = AT + BT$.

(3p) **f)** Să se arate că segmentele $[DC]$, $[AE]$ şi $[BF]$ sunt egale şi concurente în punctul T.

(2p) **g)** Să se demonstreze că, dacă poligonul convex $A_1A_2...A_n$, admite în interior un punct O cu proprietatea $m\left(\widehat{A_1OA_2}\right) = m\left(\widehat{A_2OA_3}\right) = ... = m\left(\widehat{A_{n-1}OA_n}\right) = m\left(\widehat{A_nOA_1}\right)$, atunci

$OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_n \le XA_1 + XA_2 + \ldots + XA_n$, pentru orice punct X din planul poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$ ($n \ge 3$, $n \in \mathbf{N}$).

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcția $f : (1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = ln(ln\, x)$ şi şirurile $(a_n)_{n\ge2}$, $(b_n)_{n\ge2}$ şi $(c_n)_{n\ge2}$

$a_n = \dfrac{1}{2\,ln\,2} + \dfrac{1}{3\,ln\,3} + \ldots + \dfrac{1}{n\,ln\,n}$, $b_n = a_n - f(n)$, $c_n = a_n - f(n+1)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (1,\infty)$.

(3p) **b)** Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $(1,\infty)$.

(2p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall k \in (1,\infty)$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{c \ln c}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\dfrac{1}{(k+1)ln(k+1)} < ln(ln(k+1)) - ln(ln\, k) < \dfrac{1}{k\, ln\, k}$, $\forall k \in (1,\infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\ge2}$ este strict descrescător iar şirul $(c_n)_{n\ge2}$ este strict crescător.

(3p) **f)** Să se arate că şirurile $(b_n)_{n\ge2}$ şi $(c_n)_{n\ge2}$ sunt convergente şi au aceeaşi limită .

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) **h)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(2^n+1)\ln(2^n+1)} + \dfrac{1}{(2^n+2)\ln(2^n+2)} + \ldots + \dfrac{1}{3^n \ln 3^n}\right)$.

SUBIECTUL IV (30p)

1. Descrieți, la alegere, una dintre următoarele metode de învățământ: *problematizarea, experimentul, simularea*, *expunerea*, prezentând:

a) definiția;
b) caracterizarea metodei;
c) un exemplu de utilizare a metodei la disciplina de concurs.

(9p.)

2. Alegeți unul dintre următoarele mijloace de învățământ: *calculatorul*, *fişele de lucru*, *filmul didactic, aparatele şi instrumentele de laborator*, şi precizați:

a) modul său de integrare în activitatea didactică cu elevii (predare / învățare / evaluare);
b) un exemplu de utilizare adecvată a respectivului mijloc de învățământ la disciplina de concurs, pe o temă la alegere.

(9p.)

3. Elaborați, pentru disciplina la care susțineți acest concurs, o probă de evaluare sumativă / finală, care să conțină:

a) trei itemi, cîte unul, la alegere, dintre următoarele tipuri: *de tip pereche; cu un răspuns scurt*; *cu alegere multiplă*; *rezolvare de problemă;*
b) baremul de corectare al probei de evaluare (răspunsul corect pentru fiecare item şi distribuirea punctajului de 100 de puncte, dintre care 10 puncte se acordă din oficiu).

(12p.)