SUBIECTE DATE LA ADMITERE IN FACULTATE

1. SIRURI

1. Sa se det. $a,b,c\in R$, a.i.
   $\lim_{n} (a\cdot n - \sqrt{(-2+bn+cn^2)})=1$
2. Sa se studieze sirul (q^n), $q\in R$.
3. Se considera sirurile $\{x_n\}_{n\in N}$, $\{y_n\}_{n\in N^*}$:
   $x_o\in(0,2)$ si $x_{n+1}=\sqrt{(4xn-xn^2)}, n\in N$ si $y_n=(0\cdot 4)n \cos n\pi/4$, $n\in N^*$
   1° a) A($\{x_n\}$e strict ↘)
      b) B($\{x_n\}$are limita zero)
      c) C($\{x_n\}$este strict ↗)
      d) D($\{x_n\}$nu e monoton)
      e) E($\{x_n\}$nu e marginit)
   2° a) A($\{y_n\}$e crescator)
      b) B($\{y_n\}$nu e marginit superior)
      c) C($\{y_n\}$e descrescator)
      d) D($y_n>0$, $\forall$ $n\in N^*$)
4. Sa se determine $a,b,c\in R$ a.i. $\lim_{n\to\infty} n(an-\sqrt{(-2+bn+cn^2)})=1$
5. Sa se det. ct. α a.i. $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(\sqrt{(n+\sqrt{n})}-\sqrt{(n-\sqrt{n})})$ sa existe si sa fie finita.
6. Se considera sirurile $(x_n)_{n\geq0}$ si $(yn)_{n\geq1}$, $x_0\in(0,2)$ si $x_{n+1}=\sqrt{(4xn-xn^2)}, n\in N$ si $y_n=(0,4)^n \cos(n\pi/4), n\geq1$. Stabiliti daca:

a) (x_n) are limita 0.	a) (y_n) nu e marginit superior.
b) (x_n) strict ↘.	b) (y_n) ↗.
c) (x_n) nu e monoton.	c) (y_n) convergent.
d) (x_n) strict ↗.	d) (y_n) ↘.
e) (x_n) nu e marginit.	e) $y_n>0$, $\forall$ $n\geq1$.

7. Fie $a\in R$, iar $(x_n)_{n\geq1}$ sirul definit prin
   $$x_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ x_{n-1}^3+6x_{n-1}^2+12x_{n-1}+6, & n\geq2 \end{cases}$$
   a) Sa se arate ca pt. $\forall$ $n\in N, n\geq1$ are loc egalitatea $x_n=(a+2)^{3^{n-1}}-2$
   b) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.
8. Sa se determine $a,b\in R$ a.i. $\lim_{n\to\infty} [(n^3-1)/(n^3-2n+1)]^{an^b}=\sqrt{e^3}$
9. Sa se determine $a,b\in R$, $b\neq0$ a.i. $\lim_{n\to\infty} [a+(n+1)/(bn^2+n+2)]^{n+2}=1/e$.
10. Calculati $\lim_{n\to\infty} [(\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{3})/(n^2-2n)]$
11. Se considera sirul $(x_n)_{n\geq0}$ definit astfel: $x_o=a>0$, $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2, \forall$ $n\geq1$.Sa se determine valorile lui a pt. care sirul e convergent si sa se calculeze limita sa.

12. Fie $a_n, b_n \in Q$, $n \in N^*$ a.i. $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Sa se arate ca sirul $(a_n/b_n)_{n\geq1}$ e convergent si sa se calculeze, limita acestui sir.

13. Fie sirul cu termenul general $a_n = n(an + \sqrt{(2+bn^2)})$, $n \in N$, $a,b \in R$. Care sunt valorile param. a si b a.i. sirul sa aiba limita 1?

14. Fie $a_{n+1} = [(5a_n+3)/(a_n+3)]$, $n \geq 1$, $a_1 \geq 0$. Sa se arate ca sirul $b_n = [(a_n-3)/(a_n+1)]$, $n \geq 1$ este o progresie geometrica si sa se studieze convergnta sirurilor (a_n)si (b_n).

15. Sa se arate ca $\lim\limits_{n\to\infty} [(a \ln(3+n) + b \ln(2+n) + c \ln(1+n)] = 0 \Leftrightarrow a+b+c=0$.

16. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - \sqrt{(n^4-n^3+1)} \sin \pi/n)$

17. Fie $k \in N^*$, fixat. Definim sirul $(x_n)_{n\geq1}$, $x_1 = 1/k!$, $x_{n+1} = nx_n/(n+k)$, $n \geq 1$.

a) Sa se arate ca $x_n = 1/[n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)]$, $n \geq 1$

b) Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

18. Se considera sirul $(a_n)n \in N$ definit de $an = \sum\limits_{k=1}^{n} \log_{1/3} (1-2/[k(k+1)])$. Sa se calculeze limita sirului avand termenul general $b_n = n \ln a_n$

19. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} ({}^n\sqrt{n}-1)\ln n$.

20. Se considera sirul de nr. reale $(x_n)_{n\geq1}$ cu $x_1 = \sqrt{(1+\alpha)}$, $x_{n+1} = \sqrt{(1+x_n)}$, $n \in N^*$, $\alpha \in (0,1)$ si $L = \lim\limits_{n} x_n$. Stabiliti daca:

1° a) $(x_n) \searrow$.
b) (x_n) nu e marginit inferior.
c) (x_n) nu e $\nearrow$.
d) (x_n) nu e marginit superior.
e) (x_n) e $\nearrow$.

2° a) $L = \sqrt{\alpha}$ c) $L = (1+\sqrt{5})/2$ e) $L = (1+\sqrt{2})/3$
b) $L = (1+\sqrt{3})/2$ d) $L = 0$

21. Sirul $(x_n)_{n\geq0}$ definit prin $x_o = 1$ si $x_{n-1} = x_n/\sqrt{(x_n^2+1)}$, $n \geq 0$ are limita: a)1; b)$\sqrt{2}$; c)$\nexists$; d)0; e)$1/\sqrt{3}$.

22. Limita $\lim[(p+n)!/(n!n^p)]^n$, $p \in N$ e egala cu:
a)∞; b)0; c)e^p; d)$e^{p/b}$; e)$e^{p(p+1)/2}$.

23. Se considera sirul $(x_n)_{n\geq0}$, $x_o \in (-1,1)$, $x_{n+1} = \sqrt{(1+x_n)/2}$, $\forall n \in N$ si $L = \lim\limits_{n} (x_{n+1})/x_n$. Stabiliti natura sirului (x_n) si calculati L.

24. 1° Sa se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{(2n-1)} - {}^3\sqrt{(3n-2)}]/(n-1)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} C^k_n/n^k, k \in N^*$

c) $\lim (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{2n})$, $a \in (-1,1)$.

2° Fie sirul $(x_n)_{n\geq1}$ definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{(12+x_n)}$, $n \geq 1$.

a) Sa se arate ca $0 < x_n < 4$, $\forall\ n \geq 1$

b) Dc. $y_n = 4 - x_n$, $n \geq 1$ at. $y_{n+1} < 1/4\ y_n$, $\forall\ n \geq 1$.

c) Sa se calculeze $\lim x_n$.

$n\to\infty$

26.a) Sa se precizeze valoarea limitei $l=\lim_{n\to\infty} \cos x/2 \cdot \cos x/2^2 \cdot \ldots \cdot \cos x/2^n$, $x\in R^*$.

b) Sa se determine nr. reale a,b,c a.i. $\lim_{n\to\infty} n\,(an+\sqrt{(cn^2+bn+2)})=1$

26. Fie a>0. Calculati $\lim_{n} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$

2. LIMITE DE FCTII

1. Fie $f:R\to R$ $f(x)=\sqrt{(1+x^2)}+mx$, $m\in R$. Sa se determine m a.i. $\lim_{x\to\infty} f(x)/x=3$.
2. Sa se calculeze limitele $l_1=\lim_{x\to 0} x\ln|x|$, $l_2=\lim_{x\to 0}|x|^x$
3. Sa se datermine $\lim_{x\to\infty}[(x+\sqrt{x})/(x-\sqrt{x})]^x$
4. Sa se calculeze $\lim_{x\to 0}(x^n-\sin^n x)/x^{n+2}$, $n\in N$, $n\geq 1$.
5. Sa se calculeze limita:
   $\lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to 0}(1+tg^2x+tg^2 2x+\ldots+tg^2 nx)]^{1/n^3x^2}$
6. Sa se determine $\lim_{x\to 0}(tg\, ax-\sin ax)/(tg\, bx-\sin bx)$, $a,b\in R^*$
7. Sa se calculze $\lim_{x\to 0}(e^x-e^{\sin x})/(x-\sin{}^x)$
8. Sa se calculeze: $\lim_{x\to 0}(\sin x-tg\, x)/x^2 tg\, x$
9. Se cere limita $\lim_{x\to 0}(1-x+\sin x)^{1/x^3}$
10. Fie $f:R\setminus\{0\}\to R$, $f(x)=x^3(e^{1/x}-e^{1/(x+1)})$.Sa se calculeze :
    a) limitele laterale in $x_o=0$.
    b) limitele laterale in $x=-1$.
    c) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
11. Pt. $n\in N^*$ fie $L_n=\lim_{x\to 0}(1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx)/x^2$.
    Sa se determine: L_1,L_2 si L_n.
12. Sa se calculeze $\lim_{x\to 0}(1-\cos x\cos 2x\sqrt{\cos 3x})/x^2$
13. Sa se determine param. a,b,c $\in R$ dc. :
    $\lim_{x\to -\infty}[\sqrt{(9x^2+bx)}-ax]=-2$, $\lim_{x\to\infty} x\,(c^{1/(x+1)}-1)=\ln 3$
14. Fie $f:D\to R$, $f(x)=x-\sqrt{(ax^2+bx+1)}$, a>0, $b\in R$. Sa se determine a,b a.i. $\lim_{x\to\infty} f(x)=-1/2$
15. Se considera sirul de fctii $(f_n(x))_n$, $f_n(x)=[(x^{2n}+1)((\sqrt{x^2+x+1})-x)]/(x^{2n}+x^2)$, $x\in R^*$, $n\in N^*$. Sa se calculeze $\lim_{n} f_n(x)$.
16. Determinati $a,b\in R$ pt. care $\lim_{x\to\infty}[\sqrt{(x^2+3x+a)}-b]/(x^2+x-2)=5/18$
17. a) Sa se calculeze $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+x)}-x)$
    b) Fie $a\in R$; sa se arate ca $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+x)}-ax)=1/2 \Leftrightarrow a=1$

18. Fie $A=\{a\in R \mid \lim_{x\to 1} (x^{2n}-2x^n-a)/(x-1)^2 \ \exists$ si e finita$\}$.Notam $L_{n,a}=\lim_{x\to 1} (x^{2n}-2x^n-a)/(x-1)^2$ pt. $a\in A$ si $n\in N^*$.Definim sirul $(b_{n,a})_{n\geq 1}$ prin $b_{n,a}=1/n^3 \sum_{k=1}^{n} L_{k,a}$; $b_a=\lim_{n\to\infty} b_n$ si $B=\{b_a \mid a\in A\}$. Stabiliti elementele multimilor A&B.

19. Care sunt valorile reale ale param. a si b a.i. $\lim_{x\to 1} [a/(1-x^m)-b/(1-x^n)]=(m-n)/2$, $m,n\in N^*$.

20. Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+3n^2-n+1}-an)$, $a\in R$.

21. Fie fctia $f:R\to R$, $f(x)=(a_1^x+a_2^x+a_3^x-3)/(b_1^x+b_2^x+b_3^x-3)$, $a_i,b_i>0$, $i=1,2,3$. Calculati $\lim_{x\to 0} f(x)$.

22. Dc. nr. a,b,c verifica relatia $a+b+c=\pi$, at. calculati $\lim_{x\to 1} \sin (ax^2+bx+c)/(x^2-1)$

23. Fie $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=(2^x+3^x+4^x)/3^{1/x}$. Sa se calculeze $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si sa se studieze dc. $\exists\ P\in R[x]$ a.i. $f(x)=P(x)$, $\forall\ x>0$.

24. Calculati $\lim_{x\to\infty} [(2x+\sqrt{x^2-1})^n+(2x-\sqrt{x^2-1})^n]/x^n$

25. Sa se calculeze limitele:

a) $\lim_{x\to\infty} [(3x-4)/(3x+2)]^{(x+1)/3}$

b) $\lim_{x\to 0} (2^x-3^x)/x\sqrt{1-x^2}$

3. FCTII CONTINUE

1. Fie fctia $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} 1/|x|, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$

Sa se determine a a.i. f sa fie continua pe R.

2. $f:R\to R$, $|f(x)-x^2|\leq 2|x|$, $\forall\ x\in R$. Sa se arate ca $f(0)=0$ si f e continua in $x=0$.

3. $f:[0,\pi]\to R$, $f(x)=\begin{cases} e^{3x}, & x\in[0,1] \\ a \sin(x-1)/(x^2-5x+4), & x\in[1,\pi] \end{cases}$

Sa se determine a a.i. f continua pr $[0,\pi]$.

4. a) Sa se axpliciteze fctia $f:R\to R$, $f(x)=\lim_{n\to\infty} (\cos x+|x-1|e^{nx})/(1+e^{nx})$

b) Sa se studieze continuitatea fctiei f.

5. $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} 2+\ln (1-x), & x<0 \\ m, & x=0 \\ 1+e^{-2x}, & x>0 \end{cases}$

Sa se determine m a.i. f sa fie continua pe R.

6. Fctia f definita prin $f(x)=\lim [1+x^n(x^2+4)]/x(x^n+1)$ are domeniul de def. H si multimea pctelor de discontinuitate F. Determinati F si H.

7. $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} \arcsin 2x/(1+x^2), & x\in Q \\ \end{cases}$

$\pi/2x,\ x\in R\backslash Q$

Sa se determine pctele de discontinuitate ale fctiei f.

8. $f:[-1,1]\to R,\ f(x)=(x+[x])/(|x|+[x]+2)$. Not. $A=\{x\in[-1,1]\backslash f$ e discontinua in $x\}$, cu $S=\sum_{x\in A}[f(x-0)-f(x)]^2$. Calculati S.

9. Sa se studieze continuitatea fctiei $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}[\sqrt[3]{(1-x)}-2x-1]/x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

10. Multimea valorilor param. $\alpha\in R$ pt. care fctia $f(x)=\begin{cases}e^x+|x|-\alpha, & x\le 0\\ \ln(x+1)/x, & x>0\end{cases}$ este continua pe R este:

a) $\{-1\}$; b)0; c)$\{\emptyset\}$; d)$[1,2)$.

4. FCTII DERIVABILE

1. Se da fctia $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}x^2\cos 1/x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Sa se arate ca f e derivabila pe R dar f' nu e continua in x=0.

2. Sa se calculeze derivata de ordin n, $n\in N^*$ pt. fctia $f:R\to[0,\infty),\ f(x)=x^2e^x$.

3. Sa se determine $a,b\in R$ a.i. fctia $f:R\to R$, definita prin $f(x)=\begin{cases}x^4+ax+2, & x>0\\ b+\ln(1+x^2), & x\le 0\end{cases}$

sa fie derivabila pe R.

4. $f:D\to R,\ f(x)=(x^2+|x^2+x-2|)/(x+|x+1|),\ D\subset R$. Sa se stabileasca:
   a) domeniul de definitie;
   b) continuitatea fctiei f;
   c) derivabilitatea fctiei f.

5. $f:(1,\infty)\to R,\ f(x)=x^3-3x$. Sa se determine $J=f(I)$ unde $I=(1,\infty)$ si sa se arate ca $f:I\to J$ este bijectiva. Fie $g=f^{-1}$. Sa se calculeze $g'(2)$, $g''(2)$.

6. Se da $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}|x^2-2|, & x\in Q\\ 2, & x\in R\backslash Q\end{cases}$

Dc. α e nr. elementelor multimii $A=\{x\in R\backslash f$ e continua in $x\}$, $B=\{x\in R\backslash f$ e derivabila in $x\}$ si $\beta=\sum_{x\in B}x$, at.: sa se determine α si β.

7. $f:R\to R,\ f(x)=(x^2+ax+1)e^x,\ a\in R$.

   a) Sa se determine $a\in R$ pt. care $f\nearrow$ pe R.

   b) Pt. a=0 determinati ecuatia tangentei la graficul fctiei in pctul de intersectie cu Oy.

   c) Sa se demonstreze ca $g:R\to(0,\infty),\ g(x)=(x^2+1)e^x$ este bijectiva, cu inversa derivabila in pctul 1 si sa se calculeze derivata inversei in pctul 1.

8. $f:R\to R,\ f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Sa se precizeze dc. $\exists!$ coeficientii a,b,c,d,e a.i. sa fie indeplinite conditiile:

   1° Graficul sa treaca prin pctele O(0,0), A(1,0), B(-1,-6), C(2,12).

2° Tangenta la grafic in pctul A sa aiba panta -5.
In caz afirmativ sa se determine acesti coeficienti.

9. f:R\{1}→R, $f(x)=(ax^2+b)/(x-1)$, a,b∈R. Sa se determine a,b a.i. dreapta ec. $y=-2x+13$ sa fie tangenta la grficul fctiei f in pctul de abscisa x=2.

10. f:R→R, $f(x)=x^5+x$, bijectiva. Daca g e inversa lui f, sa se calculeze g(2).

11. Se considera sirul $(x_n)_{n\in N}$, $x_o\in R\setminus\{1/2\}$, $x_{n+1}=(1+x_n)/(2x_n-1)$, n∈N si fctia f:R→{1/2}→R, $f(x)=(x+1)/(2x-1)$. Dc. A={x_o∈R,-{1/2}si sirul $(x_n)_{n\geq 0}$ e convergent} si $T=f^{(n)}(2)$, $n\in N^*$, atunci determinati multimea A si T.

5. PROPRIETATILE FCTIILOR DERIVABILE

1. f:R→R, $f(x)=(x+1)^3/(x^2-x+1)$, A-multimea pctelor de inflexiune ale lui f, $\alpha=\sum_{Q\in A} a$, r-nr. elementelor multimii A, y=mx+n asimptota oblica la graficul lui f si β=m+n. Determinati r si α.

2. Se considera f:[0,2]→R, unde $f(x)=\begin{cases} px, & x\in[0,1) \\ m, & x=1 \\ x^3+q, & x\in(1,2] \end{cases}$

Fie A={(p,m,q)∈R^3\ f e derivabila pe (0,2)}, $S=\sum_{(p,m,n)\in A}(p+m+q)$, c={c\ e obtinut prin aplicarea th. lui Lagrange fctiei f pe [0,2]} si $T=\sum_{c\in C}|c|$. Determinati S si T.

3. f:R→R, $f(x)=(x^2-ax)/(\sqrt{x^2+1})$ unde a∈R. Sa se determine a pt. care f adminte pct. de extrem situat la distanta 2 de axa Ox.

4. Multimea valorilor lui a∈R pt. care f:R→R, $f(x)=\text{arctg}(x^2+x+a)$ are 3 pcte de extrem local este:
a) (-∞,1/4); b)(1/4,∞); c){1}; d)(1,∞); e)Ø.

5. 1° $a_n=\lim_{x\to 0}[1-x^5\ln(1+2nx)]^{1/x^n}$ si $l=\lim_{x\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. Atunci calculati l.

2° f:(1,∞)→(-2,∞), $f(x)=x^3-3x$, g:(-2,∞)→(1,∞) inversa fctiei f. Calculati g'(2).

6. 1° f:[-2,2]→R, $f(x)=\begin{cases} mx^2+2x+n, & x\in[-2,0) \\ x^2+px+1, & x\in[0,2] \end{cases}$

Determinati valorile parametrilor m,n si p pt. care fctiei f i se poate aplica th. Rolle pe [-2,2].
a)1,2,3; b)3,2,1; c)3,1,2; d)1,1,2; e)2,1,3.

2° Sa se determine a,b∈R pt. care fctia f:(0,∞)→R, $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ admite extreme in pctele $x_1=1$, $x_2=2$. Stabiliti natura pctelor de extrem A(1,f(1)), B(2,f(2)).

7. 1° Sa se calculeze $f'(0)$ pt. f:R→R
$f(x)=\sqrt{(1+x^2)}+x^2/(x^4+1)+\ln(1+x^2)$

2° $f(x)=(x^2+ax)/(bx+2)$, a,b∈R. Valorile lui a si b pt. care fctia are extreme in pctele de abscisa x=-8 si x=4 sunt:
a)16,-1; b)-16,2; c)8,2; d)-16,1; e)5,3.

8. f:R→R, $f(x)=x\,\text{arctg}\,x-\ln(1+x^2)$

a) Sa se arate ca derivata fctiei f e o fctie ↗.

b) Sa se stabileasca monotonia si pctele de extrem ale fctiei f. Rezolvati inecuatia $f(x)>0$.

9. $f:R\to R$, $f(x)=3^{-2x}-2\cdot 3^{-x}$

a) Sa se calculeze limitele la $\pm\infty$.

b) Sa se stabileasca domeniul de derivabilitate si sa se calculeze derivata fctiei f. Precizati monotonia si pctele de extrem ale fctiei f.

c) Sa se determine pctele de inflexiune.

10. $f:R\to R$, $f(x)=7+2x\ln 25-5^{x-1}-5^{2-x}$

a) Sa se stabileasca domeniul de derivabilitate al fctiei si sa se calculeze derivata f'; precizati monotonia si pctele de extrem ale fctiei.

b) Determinati nr. pctelor de inflexiune.

11. a) Sa se arate ca pt. $\forall\ x\geq 0$ are loc inegalitatea:

$1-x/2 \leq 1/\sqrt{(1+x)} \leq 1$

b) $f:D\to R$, $f(x)=\operatorname{arctg} (a+x)/(1-ax)-1/a \ln \sqrt{(1+x^2)}$, $a\in R$, $a\neq 0$.

Sa se determine a a.i. $\lim\limits_{x\to\infty} (-ax\, f'(x))^x=e^2$. Pt. a=-2 sa se determine domeniul de definitie si domeniul de derivabilitate al fctiei obtinute. Sa se stabileasca intervalele de monotonie ale fctiei obtinute.

12. Se considera expresia definita prin $f(x)=\sqrt[3]{(x^2+(m-2)x-m+2)}$ m fiind parametru real.

a) Se cere sa se determine multimea valorilor lui m pt. care domeniul de definitie al fctiei coincide cu domeniul de derivabilitate.

b) Pt. m=-2, sa se stabileasca monotonia si pctele de extrem ale fctiei obtinute.

13. $f:R\setminus\{-1\}\to R$, $f(x)=(x^2-m)/(x+1)e^x$, $m\in R$, parametru.

a) Sa se determine $m\in R$ a.i. f sa aiba 3 pcte de extrem.

b) Pt. m=2, sa se stabileasca monotonia si pctele de extrem ale fctiei obtinute.

14. 1° $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} axe^x, & x\leq 0, \quad a,b,c\in R \\ b(x^2+x-2)+c, & x>0 \end{cases}$

Ce relatii trebuie sa satisfaca a,b,c pt. ca fctia sa fie derivabila in origine?

2° $f:D\to R$, $f(x)=x+1/(x+m)$, $m\in R$. Pt.ce valori ale lui m abscisa pctului de min. e jumatate din abscisa pctului de maxim?

15. 1° $f:R\setminus\{3\}\to R$, $f(x)=(ax^2+bx+c)/(x-3)$, $a,b,c\in R$, parametrii. Sa se determine a,b,c a.i. graficul fctiei f sa aiba asimptota y=x+2 iar pctul A(1,1) sa se afle pe grafic.

2° $g:R\setminus\{3\}\to R$, $g(x)=(x^2-x-2)/(x-3)$

a) Stabiliti intervalele de monotonie.

b) $g(x)=x+2+4/(x-3)$, $\forall\in R\setminus\{3\}$ (sa se arate).

c) Sa se demonstreze ca pt. $\forall\ n\in N$, $n\geq 2$.

$g^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\ 4/(x-3)^{n+1}$, $\forall\ x\in R\setminus\{3\}$.

SUBIECTE DATE LA ADMITERE IN FACULTATE

I. PRIMITIVE

1. Sa se calculeze $\int dx/x\sqrt{(1+x+x^2)}$, $x>0$
2. Sa se calculeze primitivele fctiei urmatoare:
   $f(x)=x/[(x^2+3)(x+1)]$, $x>0$
   a) $-1/4 \ln(x+1)+1/8 \ln(x^2+3)+\sqrt{3}/4 \text{ arctg } x/\sqrt{3} + \mathcal{C}$;
   b) $-1/8 \ln(x+1)+ \text{arctg } x + \mathcal{C}$;
   c) $½ \ln(x+1)^2 + \ln(x^2+3)+\sqrt{3}/4 \text{ arctg } x/\sqrt{3} + \mathcal{C}$;
   d) $2 \ln(x+1)^2 + \text{arctg } x+ \mathcal{C}$.
   e) nu are primitive
3. Sa se studieze ∃ primitivelor fctiei $f:[0,\infty)\to R$, definite prin
   $f(x)=\begin{cases} x/(1+x^4), & x\in[0,1] \\ x+a, & x>1 \end{cases}$, unde $a\in R$. In cazul in care ele ∃, sa se determine aceste primitive.
4. Sa se arate ca $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\le 0 \\ x^2/(1+x), & x>0 \end{cases}$ admite primitive si sa se determine acestea.
5. Sa se arate ca $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} \sqrt{(x^2+4x+4)}, & x\le 0 \\ 2 & x>0 \end{cases}$ are primitive si sa se determine o primitiva a sa.
6. Sa se calculeze: a) $\int (2x+e^x)dx$, $x\in R$; b) $\int x^2/(x^2+4)\, dx$, $x\in R$;
   c) $\int x \ln x\, dx$, $x>0$.
7. Sa se determine prmitivele fctiei $f: (1,\infty)\to R$, $f(x)=1/(x+\sqrt{(x^2-1)})$.
8. Se da fctia $f:R\to R$, $f(x)=\sqrt{|x^2-4|}$. Aflati primitivele lui f.
9. Sa se determine $a\in R$ a.i. $f:R\to R$,
   $f(x)=\begin{cases} 2+\ln(1-x), & x<0 \\ a & , x=0 \\ 1+e^{-2x} & , x>0 \end{cases}$ sa admita primitive pe R.
   a)1; b)-1; c)3; e)1/2.
10. Fie $f:[0,\infty)\to R$, $f(x)=\begin{cases} x \ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$
    a) Sa se arate ca f e continua;
    b) Sa se calculeze o primitiva a lui f pe $(0,\infty)$;
    c) Sa se calculeze o primitiva a lui f pe $[0,\infty)$.
11. Primitivele fctiei $f:R\to R$, $f(x)=\sin x/(1+\cos^2 x)$, sunt:
    a) $\ln(1+\cos^2 x)+\mathcal{C}$;

b) $\ln \sqrt{(1+\cos^2 x)}+\mathcal{C}$;

c) $\text{arctg}(\cos x)+\mathcal{C}$;

d) $-\text{arctg}(\cos x)+\mathcal{C}$;

e) $-\text{arcctg}(\cos x)+\mathcal{C}$.

12. Primitivele fctiei $f:(1,\infty)\to R$, $f(x)=1/x(1+\ln x)$ sunt:

a) $(1+\ln x)^2+\mathcal{C}$;

b) $\ln^2(1+\ln x)+\mathcal{C}$;

c) $\ln(\ln x)+\mathcal{C}$;

d) $\ln(1+\ln x)+\mathcal{C}$;

e) $\frac{1}{2}\ln(1+\ln x)+\mathcal{C}$.

13. Primitivele fctiei $f:R\to R$, $f(x)=x\sin(x^2+1)$ sunt fctiile

$F:R\to R$, a) $F(x)=x^2/2\cos(x^2+1)+\mathcal{C}$;

b) $F(x)=1/2\cos(x^2+1)+\mathcal{C}$;

c) $F(x)=-1/2\cos(x^2+1)+\mathcal{C}$;

d) $F(x)=x^2/2\cdot[\sin^2(x2+1)/2]+\mathcal{C}$.

14. Sa se calculeze: $\int(x+1)/(x^4+x^2+1)\,dx$, $x\in R$

15. Aratati ca $f:R\to R$, $f(x)=(x^2+x)\,\text{arctg}\,x$ admite primitive si determinati aceste primitive.

16. Calculati $\int(x^2-1)/(x^4+1)\,dx$, $x\in R$

a) $1/2\sqrt{2}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)/(x^2+x\sqrt{2}+1)+\mathcal{C}$;

b) $1/\sqrt{2}\,\text{arctg}(x^2-1)/x\sqrt{2}+\mathcal{C}$;

c) nu se poate afla primitiva.

17. Fie $f:R\to R$, $f(x)=x-2+|x-1|+|x-3|$ si fie F primitiva lui f a.i. $F(2)=0$. Sa se calculeze $F(4)$.

a)6; b)5; c)7; d)4.

18. Fie $f:R\to R$, $f(x)=(2x^2+1)+\sqrt{(x^2+1)}$. Sa se determine $a,b\in R$ pt. care fctia $F(x)=(ax+b)\sqrt{(x^2+1)}$ e o primitiva a lui f pe R.

19. Sa se determine primitivele fctiei $f:(-\pi,\pi)\to R$, $f(x)=1/(\sin x-2\cos x+3)$

20. Primitivele fctiei $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=x/(x^3+x)$ sunt fctiile $F:(0,\infty)\to R$, date de:

a) $F(x)=\ln x^2/(x^2+1)+\mathcal{C}$;

b) $F(x)=\ln(x\cdot\sqrt{(x^2+1)})+\mathcal{C}$;

c) $F(x)=\ln x-\text{arctg}\,x+\mathcal{C}$;

d) $F(x)$.

21. Sa se calculeze $\int\sqrt{x}/\sqrt{(1-x^3)}\,dx$, $x\in(0,1)$.

22. Fie $f(x)=1/x(x^2+1)$, $x>0$ si F e primitiva a sa cu proprietatea $F(1)=-\ln\sqrt{2}$.

Atunci $F(2)$ este: a) $-\ln\sqrt{5}/2$; b) $\ln 2/\sqrt{5}$; c) $-\ln\sqrt{5}$; d) $-\ln 2/\sqrt{5}$.

23. Sa se determine $3a+5b$ stiind ca fctia $F(x)=e^{-x}.(a\sin x+b\cos x)$ este o primitiva pe R a fctiei $f(x)=e^{-x}\sin x$.

a)-5; b)-4; c)-3; d)-2; e)-1.

24. Fie $f:R\setminus\{-1,1\}\to R$, $f(x)=x/(x^3+x^2-x-1)$ si F o primitiva a lui f pt. care $F(2)=-(\ln 2)/4$. Atunci $F(0)$ este: a)1/2; b)2; c)-2; d)-1/3; e)-3.

II. INTEGRALE DEFINITE

1. Fie P un polinom de grad n cu radacinile 1,2,3,….,n si fie $\int_{n+1}^{n+2} p'(x)/p(x)dx=I_n$.

Care din urmatoarele afirmatii este adevarata?
a) I=2n+3; b)I=ln (n+1); c)I=ln n/n+1; d) $e^{n+2}-e^{n+1}$; e)e^n-1.

2. Sa se calculeze in fctie de $a\in R$, $\int_1^3 dx/(|x-a|+1)$

3. Fie $f:(-1,1)\to R$, $f(x)=\int_0^x dt/(1-t^2)$. Sa se arate ca fctia este bijectiva.

4. Fie sirul $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n=\int_1^n (x+2)/x(x^2+1)\,dx$. Calculati lim an.
n

5. Fie fctia f:R→R, $f(x)=x^3+mx^2+nx+p$. Determinati parametrii reali m,n,p a.i. f sa aiba extreme in pctele –1 si 1, iar $\int_{-1}^{1} f(x)dx=2$.

6. Valoarea lim $(\int_0^x \operatorname{tg} t\, dt)/x^2$ este: a)1; b)1/2; c)-1/2.

7. Sa se calculeze : a) $\int_0^3 dx/\sqrt{(2x+3)}$; b) $\int_0^4 x\sqrt{(x^2+9)}\,dx$

8. Fie $I(a)=\int_0^a x/[(x+1)(x^2+4)]\,dx$, a>0. a)Calculati I(a); b)Calculati $\lim_{a\to\infty} I(a)$;
c) Studiati monotonia fctiei I:(0,∞)→R.

9. Sa se calculeze $\int_0^4 \sqrt{x}/(x+1)\,dx$

10. Sa se calculeze $I=\int_0^1 e^x/e^{2x}+1\,dx$.

a)I=arctg 2; b)I=1; c)I=ln 2; d)I=arctg e; e)I=arctg e-π/2; f)1/2 ln 2.

11. Fie $f:[0,\infty)\to R$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1], \\ x-1, & x>1 \end{cases}$ $I=\int_0^1 f(e^t)/f(e^{-t})\,dt$,
$g(t)=f(e^t)/f(e^{-t})$ si $G=g^{(n)}(1/2)$. Atunci:
1° a) $I=(e-1)^2/2$; b) I=e/2(e-1); c) $I=e^2-2e$; d) I=(e-1)/2e; e) $I=(e^2-1)/2$.

2° a) $G=2^n e-\sqrt{e}$; b) $G=2^n e^2-e$; c) $G=2^{n-1}-e$; d) $G=2^n\sqrt{e}$; e) $G=2^n-\sqrt{e}$.

12. Care este valoarea integralelor:

1° $\int_0^1 e^{2x}/(1+e^x)dx$, a) $e+1+\ln (e+1)/2$; b) $e-1-\ln (e+1)/2$; c) $e+1+\ln (e-1)/2$; d) $1+\ln (e+1)/2$; e) $1-\ln (e+1)/2$

2° $\int_0^1 2x^2/(1+x^2)dx$, a) $\pi/2$; b) $-\pi/2+2$; c) 1; d) 1/2; e) 1/3.

13. Sa se calculeze $\int_e^{e^2} \ln x/x(1+\ln x)dx$

14. Fie $f:R\setminus\{1\}\to R$, $f(x)=(x^2-3|x-2|)/(x-1)$. a) Sa se determine asimptotele fctiei f; b) Sa se calculeze $\int_{3/2}^{3} f(x)\, dx$.

15. Sa se calculeze $I_n=\int_0^n 4x/[(x+1)(x^2+3)]dx$ si sa se determine $\lim_{n} I_n$.

16. 1° Fie fctia $f:[0,\infty)\to R$, $f(x)=\min \{x,2/(x^2+1)\}$. Sa se studieze continuitatea si derivabilitatea lui f. Calculati limita sirului (a_n), $a_n=\int_0^n f(x)dx$, $n\geq 1$.

2° Fie $I_n=\int_e^{e^n} (1+\ln t)/[t(\ln t)(1+\ln^2 t)]dt$, $n\in N$. Calculati I_n folosind schimbarea de variabila $x=\ln t$ si $\lim_{n} I_n$.

17. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\sqrt{(x^2+x+1)}-\sqrt{(x^2-x+1)}$. Se cere sa se determine: a) asimptotele fctiei; b) Valoarea integralei $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

18. 1° Limita $\lim_{x\to 0} (\int_0^3 e^{-t^3}\, dt)/\sin^3 t$ este egala cu: a) 0; b01; c) 2/3; d) e; e) ∞.

2° Integrala $I=\int_{-2}^{2} |x^2-1|\, dx$ este: a) I=4; b) I=0; c) I=3; d) I=1; e) I=-4.

19. Sa se calculeze integrala: $\int_0^1 (x+1)/\sqrt{(x^2+1)}\, dx$

20. Fie $I_n=\int_0^1 x^n/(1+x^2)dx$, $n\in N$. Calculati: I_o, I_1, I_2; b)Stabiliti o relatie de recurenta

intre I_n si I_{n-2}; c) Calculati I_{2m+1}, $m\in N$.

21. Sa se calculeze $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^3-2x+1+\sin x)/(x^2+1)\,dx$

22. Fie $f:[-1,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases} x/(x^2+1), & x\in[-1,0] \\ x, & x\in(0,1] \end{cases}$

a) Sa se arate ca f este continua;

b) Sa se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$;

c) Sa se arate ca $e^x \geq x+1$, $\forall$ $x\geq 0$ si apoi sa se demonstreze inegalitatea $\int_0^1 ex^2 \geq 4/3$

23. Fie $n,k\in N^*$, n fixat si $I_k=\int_1^n |x-k|\,dx$, $k=\overline{1,n}$. Se defineste sirul $a_n=1/n^3 \sum_{k=1}^{n} I_k$, $n\in N^*$ si fie $L=\lim_{n\to\infty} a_n$

Atunci: 1° a) $I_k=2k^2+n^2$; b)$I_k=(k^2+n^2)/6$; c)$I_k=[k^2+(n+k)^2]/2$; d)$I_k=k^2+n^2-nk$; e) $I_k=[(k-1)^2+(n-k)^2]/2$.

2° a)$L=1/3$; b)$L=2/3$; c)$L=1/6$; d)$L=0$; e)$L=1$.

24. Fie sirul $I_n=\int_0^1 x^n/\sqrt{(x^2+1)}dx$, $n\in N^*$. a) Calculati I_1; b) Sa se arate ca sirul este monoton ↘ si marginit. Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

25. Valoarea integralei $\int_{-2}^{2} (|x-1|+|x+1|)\,dx$ este: a)6; b)8; c)10; d)12; e)14.

26. 1° Limita $\lim_{n\to\infty} 1/n \int_1^n (x-1)/(x+1)dx$ este: a)0; b)1; c)2; d)e; e)∞.

2° Sa se calculeze $\lim_{x\to 0} (\int_0^x \text{arctg}\, t\, dt)/x^2$. a)1/2; b)0; c)-1; d)-1/2.

27. Sa se calculeze $L=\lim_{n\to\infty} \int_0^2 |x-n|/(x+n)dx$. a) limita $\nexists$; b)$L=\infty$; c)$L=1$; d)$L=-3$; e)$L=0$; f)$L=2$.

28. Fie $I_n=\int^n (x+4)/(x^2+3x+2)dx$, $n\in N^*$. Dc. $\alpha=\lim (n+\sqrt{n+3})I_n$ si

$n+1$

$\beta=\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[3]{(x3+x2+1)}+\sqrt[3]{(x3-x2+1)}-2x)$, atunci:

1° a)$\alpha=0$; b)$\alpha=1/e$; c)$\alpha=1$; d)$\alpha=\sqrt{e}$; e)$\alpha=e$
2° a)$\beta=3$; b)$\beta=2/9$; c)$\beta=3/2$; d)$\beta=-2/9$; e)$\beta=-2/3$.

29. Sa se calculeze $\int_0^1 x \ln (x+\sqrt{(1+x^2)})dx$

30. Fie fi:[0,∞)→R, i=1,2,3 si $f_1(x)=1+x$, $f_2(x)=e^{x/(x+1)}$, $f_3(x)=e^x$. Fie $I=\int_0^1 [f_2(x)/f_1(x)]^2dx$. Atunci:

1° a)$I=1-\sqrt{e}$; b)$1/2(1-e)$; c)$I=e-1$; d)$I=e^2-1$; e)$I=1/2(e-1)$.
2° a)$f_1<f_2<f_3$; b)$f_3<f_1<f_2$; c)$f_2\le f_1\le f_3$; d)$f_1\le f_3\le f_2$; e)$f_2\le f_3\le f_1$.

31. Sa se calculeze $\int_{-1}^1 \ln (|x|+1)/(x^2+1)dx$

32. Fie $I_n=\int_0^1 (1-x^2)n\, dx$, $n\in N$. Sa se determine o relatie de recurenta intre I_{n+1} si I_n si sa se calculeze $\lim_n I_n$.

33. Fie $P\in R[x]$ cu grad (P)=n, $n\in N^*$. Sa se arate ca:

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x P(t)e^{-t}\, dt=P(0)+P'(0)+\ldots+P^{(n)}(0).$$

34. Sa se stabileasca o relatie de recurenta pt. calculul integralei $I_n=\int_0^1 x^ne^xdx$ si sa se calculeze $\lim_n I_n$.

35. a) Sa se determine ct. reale m,n,p a.i. fctia F:R→R, $F(x)=(mx^2+nx+p)e^x$ sa fie primitiva fctiei f:R→R, $f(x)=x^2e^x$.

b) Sa se calculeze integrala $I(a)=\int_a^0 (2x^2-3x)e^xd^x$, unde $a\in R$, parametru si apoi sa se calculeze $\lim_{a\to -\infty} I(a)$.

36. a) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_1^n (x-1)e^{-x}dx$. a)0; b)$e^2$; c)e-1; d)1/e; e)1/e-1

b) Sa se calculeze $\int_?^2 dx/x\sqrt{(x^2-1)}$. a)$\pi/12$; b)$\pi/4$; c)0; d)-1; e)$\pi/6$.

37. a) Sa se calculeze $\int_0^{\sqrt{2}} e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx$

b) Sa se arate ca ca fctia $f:[0,3]\to R$, $f(x)=x-[x]$ se poate integra si sa se calculeze

$\int_0^3 f(x)dx$.

38. Fie $f:R\to R$, $f(x)=e^{2x}(x^2+4x+2)$.
a) Sa se calculeze $f'(x)$; b) Sa se determine punctele de extrem ale fctiei; c) Sa se calculeze $\int f(x)\, dx$.

39. Sa se calculeze integralele definite:

$I_1=\int_0^4 x\sqrt{(x^2+9)}dx$, $I_2=\int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx$.

40. Fie $f:(-\infty,-2)\to R$, $f(x)=(x^2+x+1)/(x+2)^2 e^x$. a) Sa se determine asimptotele la graficul fctiei; b) Sa se determine $a,b\in R$ a.i. fctia $F:(-\infty,-2)\to R$, $F(x)=(ax+b)/(x+2)e^x$ sa fie o primitiva a lui f pe $(-\infty,-2)$; c) Sa se calculeze $\int_{-4}^{-3} f(x)\, dx$.

41. Fie sirul (I_n) definit prin $I_n=\int_1^e (\ln x)^n dx$, $n\geq 1$. a) Sa se arate ca (I_n) este monoton si marginit. b) Sa se afle o relatie de recurenta intre I_n si I_{n-1}. c) Sa se calculeze $\lim I_n$.

42. Fie $p>0$, $n\in N$. Sa se arate ca $\int_0^1 (1-x^p)^n\, dx=(n!p^n)/[(p+1)(2p+1)\ldots(np+1)]$

43. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} (x^2+|x^2-4|e^{nx})/(1+(x^2+1)e^{nx})$. Fie m nr. pctelor de extrem local ale fctiei, p nr. pctelor de discontinuitate ale fctiei f, $S=m^2+p^2$ si $I=\int_{-1}^1 f(x)dx$.Atunci:

1° a)S=5; b)S=10; c)S=2; d)S=4; e)S=13.
2° a)$I=3\pi/2$; b)$I=(3\pi-2)/4$; c)$I=(5\pi-8)/12$; d)$I=(5\pi+6)/4$; e)I=0. (ASE '99)

44. Se considera $I_n=\int_0^n e^{-bx} \sin a x\, dx$, $n\in N^*$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Fie $L=\lim\limits_n I_n$. Dc. I este valoarea integralei I_n pt. n=1 si $a=b=\pi/2$, at.:
1° a)L=0; b)$L=(a+b)/(a^2+b^2)$; c)$L=a/(a^2+b^2)$; d)$L=b/a^2$; e)$L=b/a$
2° a)$I=1/\pi(1-e^{-\pi/2})$; b)$I=e^{-\pi/2}/\pi$; c)$I=(1-e)/\pi$; d)$I=\pi^2/4\, e^{-\pi/2}$; e)$I=4/\pi^2\, e^{\pi}$.

45. Limita $\lim_{n\to\infty} (2n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$ este :

a)1; b)e; c)2e; d)0; e)∞.

46. Calculati $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}\,x)\,dx$.

47. Se considera fctia f:R→R, unde $f(x)=\int_0^x (t^3-3t+2)e^{t^2}\,dt$. Dc. A={x∈R/ x e pct de extrem al lui f}, at:

a)A={-2}; b)A={-2;+1}; c)A={1}; d)A=0; e)A={-1,2}. (ASE '00)

48. Valorile rationale ale lui a,b pt. care integrala $I=\int_{-1}^{1} (x^2+a|x|+b)e^{|x|}\,dx$ este un nr. rational sunt:

a)a∈Q, b=2; b)a,b∈R; c)b=1, a∈Q; d)b=-1, a∈Q; e)a=1/2, b=1.

III.APLICATII ALE INTEGRALEI DEFINITE

1. Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} [(4n-4-2a_n)/\pi]^n$ unde $a_n=\int_1^n 2x^2/(x^2+1)\,dx$, $n\in N^*$.
2. Se da $f_n(x)=(1+x+x^2+\ldots+x^n)/(1+x^n)$, $x\in[0,\infty)$, n∈N.

   a) Sa se calculeze $\int_0^1 [f_2(x)-f_1(x)]\,dx$.

   b) Sa se traseze graficul fctiei f:[0,∞)→R, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (UPB '78)
3. Sa se determine nr. reale A,B,C a.i.

   $\int_{-1}^{1} f(x)dx=Af(-1\sqrt{2})+Bf(0)+Cf(1/\sqrt{2})$, pt.∀ fctie polinomiala reala f de grad cel mult 3(trei).
4. Fie f:R\{-1}→R, $f(x)=x+4(1+x)^{-2}$. a) Sa se reprezinte graficul lui $f(x)$; b) Sa se afle aria S(a) a domeniului delimitat de graficul lui f si dreptele y=x, x=1, x=a, a>1 si sa se calculeze apoi $\lim_{a\to\infty} S(a)$. (UPB '78)
5. Fie f:[-1,∞)→R, $f(x)=|1-\sqrt{(x+1)}|$. Sa se studieze continuitatea si derivabilitatea lui f si sa se calculeze volumul corpului definit prin rotirea graficului lui f in jurul axei Ox, pt. $-1\le x\le 1$. (UPB '79)

6. Fie $f(x)=(2x^2+1)/x(x+a)$, $x\neq 0$, $x\neq -a$, a parametrul real. a) Sa se traverseze graficul lui f stiind ca acest grafic trece prin A(1,1); b) Sa se determine aria figurii determinate de graficul lui f (cu a determinat la a)) axa Ox si dreptele x=1, x=2. (UPB '79)

7. Se considera $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita de $f(x)=\sqrt{(x^2+1)}+mx$, unde m este parametru real.

a) Sa se determine m a.i. $\lim_{x\to\infty} f(x)/x=3$.

b) Pt. m=2, sa se calculeze $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita prin $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ e^{-x+1}, & x\geq 1\end{cases}$

a)Sa se studieze continuitatea lui f si apoi sa se traseze graficul fctiei.

b) Sa se calculeze $\int_1^2 [x f''(x)+f'(x)]\,dx$. (ASE '78)

9. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2bx+5)/(x-a)$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Sa se determine a,b a.i. $f'(-1)=f'(3)=0$

b) Pt. a=-b=1 sa se calculeze $\int_2^3 f(x)\,dx$. (ASE '78)

10. Determinati o primitiva a fctiei $f:\mathbb{R}[-1;1]\to\mathbb{R}$, data de $f(x)=\begin{cases}x^2(\ln|x|)^2, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ si calculati $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

11. Se considera fctia $f:[0,3]\to[0,2]$, $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{(1-x)}, & x\in[0,1]\\ (x+1)/2, & x\in(1,3]\end{cases}$

Sa se arate ca f e bijectiva, sa se determine f^{-1} si sa se calculeze $\int_0^3 f^2(x)\,dx$.

12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, & x\leq 2\\ bx+a, & x>2\end{cases}$. a) Sa se gaseasca relatia intre nr. a,b pt. care f este cotinua pe R. Sa se arate ca in acest caz f este derivabila pe R. b) Pt. a,b determinati mai sus sa se gaseasca o primitiva a lui f pe R si apoi sa se calculeze

$\int_0^4 f(x)dx$. (ASE '82)

13. Sa se calculeze lim I(a), unde $I(a)=\int^0 e^x(2x^2-3x)dx$. (ASE '83)

$a\to -\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ a

14. Sa se calculeze $\int_1^3 dx/(|x-a|+1)$, unde $a\in R$. Not. I(a) rezultatul gasit, sa se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$. (UPB '83)

15. Sa se studieze continuitatea si derivabilitatea fctiei
$f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} |\ln|x-4||, & x\in R\setminus[7/2, 9/2] \\ a\sin(2\pi x)+b, & x\in[7/2, 9/2] \end{cases}$

unde $a,b\in R$. Sa se calculeze $\int_3^5 f(x)\,dx$ pt. a,b determinati la continuitatea lui f pe R.

16. Fie $f:[0,\infty)\to R$ definita prin $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ x-1, & x>1 \end{cases}$. Sa se calculeze $\int_0^1 f(e^t)/f(e^{-t})\,dt$.

17. Sa se calculeze $I=\int_0^2 |x-1|/(x^2+4)\,dx$.

18. Sa se calculeze $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b (1-x)/(x^3+8)\,dx$. (ASE '85)

19. Sa se arate ca $2\sqrt{e}\le\int_0^1 e^{x^2}\,dx+\int_0^1 e^{1-x^2}\le 1+e$.

20. Fie $f:(0,\pi/2)\to(0,\infty)$, $f(x)=\int_0^x [(\sin t+\cos t)\sin t]/\cos^2 t\,dt$. Sa se calculeze integrala si sa se arate ca fctia f e bijectiva. (ASE '86)

21. Sa se calculeze $\int_1^3 |(x-1)(x-2)(x-3)|\,dx$. (UPB '86)

22. Fie fctia $f:[1,4]\to R$, $f(x)=x^2/2-\ln\sqrt[4]{x}$. Sa se calculeze aria suprafetei de rotatie determinata de fctia f. (ASE '87)

23. Se considera $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} (x-1)/e^x, & x<1 \\ \ln^2 x/x, & x\ge 1. \end{cases}$
Sa se arate ca f admite primitive si sa se calculeze o primitiva a sa.

24. Calculati $\lim 1/n\sum_{k=1}^{2n} \sqrt[n]{e^k}\,\sin 2k/n$. (ASE '87.)

25. $I_n=\int^{e} (\ln x)^n\,dx$, $n\ge 1$ $n\in Z$. a) $(I_n)_{n\ge 1}$ este monoton si marginit; b)Relatia de

recurenta intre I_n si I_{n-1} si calculati $\lim_{n\to\infty} I_n$.

26. Calculati $\int_0^2 \max(\ln(1+x^2),1)\,dx$.

27. Fie $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases}\min(x^2,|\ln x|), & x\neq 0.\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Sa se arate ca f este integrabila si sa se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

28. Fie $f:[0,\pi/2]\to R$, $f(x)=\begin{cases}\sin x/x, & x\neq 0.\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Sa se arate ca $1<\int_0^{\pi/2} (x)\,dx<1+\cos 1$

29. Se not. $I_n=\int_1^2 (\ln x)^2/[x(1+(\ln x)^2)]\,dx$, $n\in N$. a) Calculati I_o, I_1; b) Sa se arate ca $\lim_{n\to\infty} I_n=0$.

30. Fie $f:[-\pi,\pi]\to R$, $f(x)=\begin{cases}\sin x/x, & x\neq 0, \ p\in R.\\ p, & x=0.\end{cases}$

a) Pt. p=? f este integrabila? b) Sa se determine $p\notin[0,1]$ pt. care f admite primitive.

31. Aratati ca $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\text{tg } x)\,dx<\int_0^{\pi/4} \text{tg } x\,dx$.

32. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\leq 0\\ a_o x^2+a_1 x+a_2, & x>0, \ a_1,a_2,a_3\in R\end{cases}$

a) Sa se determine a_o,a_1,a_2 a.i. f sa fie de doua ori derivabila pe R.

b) Sa se determine o primitiva a lui f pe R.

33. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}1/x^3\, e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

a) Sa se studieze continuitatea si derivabilitatea lui f si sa se calculeze f';

b) Sa se determine extremele locale si pctele de inflexiune ale lui f;

c) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx$.

34. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in(-\infty,-1)\end{cases}$

$\lfloor 2x+\lambda,\ x\in[-1,\infty),\ \lambda\in R$

a) Determinati λ a.i. f derivabila pe R.

b) Pt. ce valori ale lui λ f admite primitive pe R si at. determinati familia lor.

35. Sa se arate ca $f(x)=\min\{1,x,x^2\}$, $x\in R$ admite primitive, este integrabila pe [-2,2] si sa se calculeze $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

36. a) Sa se arate ca $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} 1/x^5\, e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

admite primitive pe R.

b) Sa se calculeze o primitiva a sa.

37. Se considera $f:R\setminus\{0\}\to R$, $f(x)=[(x+3)(x-1)^2]/x^2$

1° Asimptota oblica spre $+\infty$ la grafic este: A($y=x-1$); B($y=x+2$); C($y=x+1$); D($y=x+3$); E($y=x$).

2° f admite un extrem local in pctul: A($x_o=2$); B($x_o=-1$); C($x_o=6$); D($x_o=6/5$); E($x_o=1$).

3° $I=\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ este: A($I=3-5\ln 2$); B($I=4-5\ln 2$); C($I=5\ln 2-4$); D($I=3\ln 2+4$); E($I=4+5\ln 2$). (ASE '92)

38. Se considera $f:R\to R$, $f(x)=\int_{0}^{x} (2t+1)/(t^2-2t+2)\,dt$.

1° Valoarea fctiei f in $x_o=1$: A($f(1)=-\ln 2+3\pi/4$); B($\ln 2+3\pi/4$); C($-\ln 2+\pi/4$); D($\ln 2-\pi/4$); E($-\ln 2+\pi/2$).

2° Fctia f admite un minim local in pctul A($x_o=1/2$); B($x_o=1$); C($x_o=-1$); D($x_o=-1/2$); E($x_o=1/3$). (ASE '92)

39. Se considera $f:M\to R$, $f(x)=(x+1)/(x^2+ax+b)$, $a,b\in R$, $M\subset R$, fiind domeniul maxim de definitie.

1° $x=1$ asimptota verticala si in $x=3$ admite extrem local pt. A($a=1,b=2$); B($a=-8,b=7$); C($a=-1,b=-2$); D($a=2,b=3$); E($a=5,b=3$).

2° Pt. $a=1,b=-2$ domeniul maxim de deinitie M este: A($M=R\setminus\{-2,1\}$); B($M=R$); C($M=R\setminus\{-2,3\}$); D($M=R\setminus\{1,2\}$); E($M=R\setminus\{-1,1\}$).

3° Asimptota orizontala spre $+\infty$ este: A($y=1$); B($y=0$); C($y=-1$); D($y=2$); E(nu exista).

4° Pt. $a=2$, $b=3$, $I=\int_{-2}^{1} (x+1)/(x^2+2x+3)\,dx$ este: A($I=1/3\ln 2+1$); B($I=1/3\ln 2$); C($I=\ln\sqrt{2}$); D($I=\ln 2+1/2$); E($I=1/3\ln 2+1/2$). (ASE '92)

40. Se considera $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} 4^{mx}+1, & x\leq 1 \\ 2mx+2, & x>1 \end{cases}$

a) Sa se determine $m \in R$ pt. care f continua pe R;
b) Sa se studieze derivabilitatea lui f pe R pt. valorile lui m de la a).

c) Pt. m determinat la a) sa se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.

41. Fie $f:R \to R$, $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \le 0, \\ ax^2+bx+c, & x>0 \end{cases}$ $a,b,c \in R$, $a \ne 0$

a) Studiati continuitatea fctiei;
b) Pt. c=1 sa se determine o primitiva a lui f pe R.

42. Se considera $f:R \to R$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

a) Sa se calculeze $I_n=\int_0^n f(x)\,dx$;

b) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$. (ASE '90)

43. Fie sirul $(I_n)_{n\ge 0}$, unde $I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$

a) Sa se calculeze I_3; b) Sa se arate ca sirul (I_n) este convergent;
c) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$. (UPB '90)

44. Fie $\mathcal{F}$ familia fctiilor derivabile $f:R \to R$ avand proprietatea $\int_0^{+1} f(x)\,dx=f(0)=f(1)$

a) Sa se determine fctiile polinomiale de grad 3 din $\mathcal{F}$.
b) Sa se arate ca $\exists$ $f'(x)=0$ are cel putin doua radacini reale in (0,1), pt. $\forall f \in \mathcal{F}$.
(UPB '90)

45. Fie $f:[0,2] \to R$, $f(x)=x-[x]$.

a) Sa se arate ca f este integrabila si sa se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.

b) Sa se arate ca f nu admite primitive.

46. Se considera fctia $f:[0,1] \to R$, $f(x)=\begin{cases} x, & x \in [0,1/2] \\ -2, & x \in [1/2,1] \end{cases}$

Sa se arate ca f e integrabila, dar nu are nici o primitiva . Sa se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

47. Fie $f:[0,2] \to R$, $f(x)=(x^4+5)/(x^4+2)$.

a) Sa se studieze monotonia lui f.

b) Sa se arate ca $7/3 \le \int_0^2 f(x)\,dx \le 5$

0

48. Fie f:R→R, $f(x)=\begin{cases} 2^{ax}+1, & x\le 1 \\ ax+2, & x>1 \end{cases}$

Sa se determine nr. real a pt. care f admite primitive pe R si sa se determine aceste primitve.

49. Fie f:R→R, $f(x)=\begin{cases} \sin x/x, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

a) Sa se arate ca f admite primitive pe $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$.

b) Sa se arate ca f nu admite primitive pe [0,1]

c) Sa se calculeze $\int x^3 f(x)\,dx$, $x\in$R.

50. Fie f:R→R, $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0, \quad a,b\in R \end{cases}$

Sa se determine a,b a.i. f admite prmitive pe R.

51. Fie f:R→R, $f(x)=\begin{cases} e^x\cdot x, & x\le 1 \\ \alpha x+\beta, & x>1 \end{cases}$

a) α,β=? a.i. f derivabila pe R;

b) graficul fctiei;

c) aria multimii marginita de curbele $y=f(x)$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$.

52. Calculati $\int_0^2 (x/(x+1)+|x-1|e^{-x})\,dx$

53. Fie f:R→R, $f(x)=\begin{cases} 2x^2+n, & x\le 2 \\ 2mx^3+11m, & x>2, \quad m,n,\in R \end{cases}$

a) Determinati m,n, a.i. f continua pe R.

b) Determinati m,n, a.i. f derivabila pe R.

c) Cu m,n de la b) sa se determine o primitiva a lui f pe R.

54. Fie f:[0,1]→R, $f(x)=\begin{cases} \mathrm{arctg}\ 1/x, & x\in[0,1] \\ \pi/2, & x=0 \end{cases}$

Sa se arate ca f admite o primitiva si sa se calculeze aceasta.

55. Sa se calculeze: a) $\int x/(1+x)\,dx$, n>-1

b) $\int x^2/(x+1)\,dx$, x>-1

1

c) $\lim_{n\to\infty} \int_0 xn/(x+1)\,dx$

56. $f:[0,b]\to R$, $0<b<1$, data de $f(x)=1/(1-x)$.
a) Sa se arate ca f satisface conditiile th. Lagrange pe $[0,b]$.
b) Aplicand th. Lagrange fctiei f, pe $[o,b]$, sa se determine $c\in(0,b)$, depinzand de b si notat prin $c(b)$.
c) Sa se calculeze $\lim_{b\to 0} c(b)$.
d) Sa se calculeze $\int_0^{1/2} c(b)\,db$. (ASE '93)

57. Fie $f:R\to R$, $f(x)=e^{-x}\cos 4x$. a) Determinati $a,b\in R$ a.i. $F:R\to R$, $F(x)=e^{-x}(a\cos 4x+b\sin 4x)$ sa fie o primitiva a lui f; b) Calculati $I_n=\int_0^{n\pi/2} f(x)\,dx$, $\forall\, n\in N^*$; c) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

58. Fie $f:[-1,1]\to R$, $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\in[-1,0) \\ cx^2+6x+6, & x\in[0,1] \end{cases}$ $a,b,c\in R$
a) Sa se determine a,b,c a.i. fctiei f sa i se poata aplica th. lui Rolle pe $[-1,1]$.
b) Sa se aplice th. lui Rolle.
c) Pt. a,b,c determinati la a) sa se calculeze o primitiva pe $[-1,1]$ pt. f.
ASE(REI) '93.

59. Fie $f:[1,5]\to R$, $f(x)=\begin{cases} \ln^3 x, & x\in[1,e] \\ ax+b, & x\in[e,5], \end{cases}$ $a,b\in R$
a) Determinati $a,b\in R$ a.i. f sa verifice conditiile th. Lagrange.
b) Calculati $\int_1^e f(x)\,dx$. (ASE '93)

60. Fie $f:R\to R$, $f(x)=e^{-x}(x-4\sin x)$. a) Calculati $L_1=\lim_{x\to\infty} f(x)$, $L_2=\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

b) Calculati $I=\int_0^1 f(x)\,dx$; c) Gasiti nr. de solutii ale ec. $f(x)=0$ din intervalul $[0,3\pi]$.
(UPB '93)

61. Fie $f:[\pi/4, 5\pi/18]\to R$, $f(x)=\sin x$. a) Sa se arate ca f este o fctie Rolle; b) Sa se aplice th. lui Lagrange a cresterilor finite pt. f; c) Sa se arate ca $\sqrt{2}/2<\sin(5\pi/18)<$ $<\sqrt{2}+\pi\sqrt{2}/72$

62. Se da $f:D\to R$, $f(x)=|x|\,e^{1/(x-2)}$. a) Reprezentati grafic fctia; b) Aratati ca pt. $x>2$ are loc inegalitatea $f(x)\geq 4\sqrt{e}$.

63. a) Sa se determine constantele reale a si b a.i. fctia $F:R\to R$, $F(x)=(ax^2+bx-2)e^{-x}$ sa fie o primitiva a fctiei $f(x)=x^2e^{-x}$

b) Sa se arate ca $g:[-1,1]\to R$, $g(x)=\begin{cases}\sin 1/x, & x\neq 0\\ 1/2, & x=0.\end{cases}$ nu are primitive.

64. Sa se calculeze: a) $\int (t+2)e^{-t}\,dt$

b) $F'(x)$ dc. $F:R\to R$, $F(x)=\int_0^{x^2} (t+2)e^{-t^2}\,dt$

65. Sa se arate ca fctia $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}e^x \sin x, & x<0\\ x^2/(1+x), & x\geq 0\end{cases}$ admite primitive pe R si calculati o primitiva a ei.

66. Fie $f(x)=e^{3x}-x-1$. a) Sa se calculeze $f', f'', f^{(n)}$.

b) Sa se arate ca $e^{3x}\geq x+1$, pt. $x>0$. c) Sa se calculeze aria marginita de graficele fctiilor $g(x)=e^x$ si $h(x)=e^{-2x}(x+1)$ si dreptele fctiilor $x=0$, $x=1$.

67. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}1/2\, e^{-1/x^2}+1/x^2\, e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$

a) Sa se arate ca f poseda primitive pt. $x\in(0,\infty)$ si sa se calculeze o primitiva;

b)Sa se determine k a.i. f poseda primitive pe R;

c) Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_n=\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$. (ASE '94)

68. Fie $f(x)=e^x-x-1$

a) Calculati extremele fctiei;

b) Aratati ca $f(x)\geq 0$, $\forall\, x\in R$;

c) Dem. ca $1/e \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq \pi/4$. (ASE '94)

69. Se considera $I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$, $n\in N^*$.

a) Sa se calculeze I_1 si I_2.

b) Sa se arate ca sirul $(I_n)_{n\in N^*}$ este monoton si marginit. (ASE '94)

70. Fie $a<b$, $a,b\in R$ si o fctie continua $f:[a,b]\to R$. Sa se arate ca fctia $F:[a,b]\to R$

definita prin $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ este o primitiva a fctiei f. (MATE '94)

71. Sa se calculeze $\int_0^{\pi/4} (1-\sin 2x)/(1+\sin 2x)\,dx$. (MATE '94)

72. a) Se da $f:R\to R$, $f(x)=(1-x)e^x$. Sa se calculeze $f'(0)$, $f''(0)$ si sa se afle $n\in N^*$ dc.

(n)

$f(0)<2$.

b) Sa se calculeze $l_1=\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)\,dt$, $l_2=\lim_{x\to\infty} 1/x \int_0^{2x} f(t)\,dt$.

73. Fie $f(x)=(x^2-1)/(x^2+ax+b)$, $a,b\in R$.

a) Sa se det. a,b a.i. graficul fctiei sa admita ca unica asimptota verticala dreapta $x=2$.

b) Pt. $a=-4$; $b=4$ sa se reprezinte grafic fctia (folosind derivata a II-a);

c) Sa se calculeze aria domeniului plan marginit de graficul fctiei (de la pctul b)), axa Ox si dreptele $x=-2$, $x=0$.

74. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\le 0 \\ x^3\ln x, & x>0 \end{cases}$

a) Studiati continuitatea fctiei f.

b) Calculati $\int f(x)\,dx$, $x\in R$.

75. a) Definiti notinunea de primitiva pt. $f:I\to R$.

b) Fie $I_n=\int x^n/\sqrt{(1+x^2)}\,dx$, $n\in N$. Sa se calculeze I_o,I_1,I_2 si sa se stabileasca o relatie de recurenta pt. I_n.

76. Fie $f:R\to R$, $f(x)=|\ln(1/2+|x|)|$. a) Studiati derivabilitatea fctiei f pe R.

b) Determinati primitivele fctiei f.

77. Calculati $\int dx/(2+\sin x)$ pe $(-\pi,\pi)$ si pe $(-\pi,3\pi)$.

78. Fctia $f:[0,2]\to R$, definita prin $f(x)=\max(x, x\cdot\ln(1+x))$ este integrabila pe $[0,2]$ si sa se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.

79. Fie $I_n=\int \ln^n x\,dx$, $n\in N$. a) Aratati ca $(I_n)_{n\ge 0}$ este monoton si marginit; b) Gasiti o relatie de recurenta intre I_n si I_{n-1}; c) Calculati $\lim I_n$.

80. a) Calculati $a_k=\int_0^k dx/(x^2+3x+2)$, $x\in N^*$;

b) $b_n=\sum_{k=1}^n a_k+n\ln ½$;

c) $\lim_{n\to\infty} b_n$;

d) $\lim_{n\to\infty} b_n/\ln n$. ASE(REI) '94

81. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c, & x<1 \\ \operatorname{arctg}(x-1), & x\ge 1 \end{cases}$

a) Stiind ca f e de 2 ori derivabila pe R, sa se determine $a,b,c\in R$.

b) Pt. $a=1$, $b=2$, $c=3$ sa se calculeze $\int^2 f(x)\,dx$. (ASE '94)

0

82. Sa se calculeze $\int_0^2 e^x f(x)\,dx$, unde $f:[0,2]\to R$, $f(x)=\max(x,x^3)$.

83. Fie $f_n:R\to R$, $n\in N^*$, $f_n(x)= x\cos x \sin^{2n-1}x$.

a) Calculati $F_n(x)=\int f_n(x)\,dx$ pt. n=1 si n=2.

b) Determinati $F_2(x)$ a.i. $F_2(\pi)=-3\pi/2$

c) Sa se stabileasca o formula de recurenta pt. calculul lui $F_n(x)$, $n\geq 2$.

84. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\max\limits_{x\in R}(x^2+3x+2, -x^2+6x+7)$

a) Studiati continuitatea si derivabilitatea fctiei;

b) Determinati pctele de extrem;

c) Calculati aria cuprinsa intre axa Ox, graficul fctiei si dreptele x=-3 si x=3.

(ASE '94)

85. Sa se arate ca $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx+\int_0^{1/2} \arcsin\sqrt{x}\,dx=\pi/8$. (ASE '95)

86. Fie $f:[0,\infty)\to R$, $f(x)=\begin{cases} x[1/x], & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

a) Graficul fctiei pe $I=[1/(n+2); 1/2]$, $n\in N^*$ fixat

b) Integrabilitatea fctiei pe I si in caz afirmativ calculati $\int_{1/(n+2)}^{1/n} f(x)\,dx$.

c) Dem. ca f admite primitve pe $(1,\infty)$ si determinati o primitiva a sa.

ASE(REI) '95

87. Fie $f_n:[0,1]\to R$, $f_n(x)=x^n e^{1-x}$, $n\in N^*$. a) Sa se arate ca $0\leq f_n(x)\leq 1$, $\forall\, x\in[0,1]$, $\forall\, n\in N^*$; b) Dc. $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$, at. sa se determine o relatie de recurenta intre I_n si I_{n-1}; c) Sa se arate ca sirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este marginit.

88. Se considera $f:[0,\infty)\to R$, $f(x)=\begin{cases} (t\ln t)/(1+t^2)^2, & t>0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$

a) Continuitatea fctiei in t=0.

b) $I_n=\int_1^n f(t)\,dt$, $n\in N^*\setminus\{1\}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ (ASE '95)

89. a) Sa se arate ca $(x-1)/x \leq \ln x \leq x-1$, $x>0$

b) Folosind a) sa se arate ca pt. $1<a\leq b$ au loc inegalitatile:

b

$1/e(e^b-e^a)\le\int_a x^x dx\le e^{b^2}(e^{-a}-e^{-b})$

90. Fie $I_n=\int x^n/(x+1)\,dx$, $n\in N$. a) Sa se calculeze I_o, I_1;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

91. Fie $F:[0,1)\to R$, $F(x)=\int_0^x (1-t)^n/(1-t)\,dt$. Sa se arate ca:

a) $0\le \ln 1/(1-x)-F(x)\le x^{n+1}/(1-x)$, $x\in[0,1)$, $n\in N^*$

b) $F(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} x^k/k$, $x\in[0,1)$, $n\in N^*$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} 1/k2^k=\ln 2$.

92. Fie $f:[0,2]\to R$, $f(x)=\min\{x,2/(1+x^2)\}$. Fie $A=\{a\in(0,2)\,|\,\nexists f'(a)\}$si $I=\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$. At.:
1° A($A\cap[0,3/2)=0$); B($A=\{1\}$); C($A\cap(0,1)\neq 0$); D($A=\{1/2;1;3/2\}$); E($A=0$).
2° A($I=1/2+\pi$); B($I=(3-\pi)/6$); C($I=(6-\pi)/12$); D($I=(\pi+3)/6$); E($I=(3+2\pi)/6$).
(ASE '97)

93. Fie $f:[0,2]\to R$, $f(x)=(x-[x])/(2x-[x]+1)$, unde [x]-parte intreaga. Fie S=suma pctelor de discontinuitate ale fctiei f si $I=\int_0^2 f(x)\,dx$. Atunci:

1° A(S=1/2); B(S=1); C(S=2); D(S=3); E(S=3/2)
2° A(I=ln 3); B(I=1-ln 6); C(I=1-1/4 ln 12); D(I=1/2-ln 12); E(I=1/4 ln 12-1).
(ASE '97)

94. Fie $f:[1,\infty)\to R$, $f(x)=[x]/(x^2+3x[x]+2[x]^2)$, $a_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx$, $n\in N^*$. $L=\lim a_n$ si $\alpha=f(2-0)+f(2+0)$. Stabiliti daca:
1° A(L=ln 6); B(L=ln 3/2); C($L=\infty$); D(L=ln 2/3); E(L=0).
2° A($\alpha=1/2$); B($\alpha=3/4$); C($\alpha=1/6$); D($\alpha=1/24$); E($\alpha=5/6$).
(ASE '97)

95. Fie $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[(n^2+xn+1)/(n^2+3n-2)]^n$ si $I=\int_0^1 x f(x)\,dx$. Valoarea lui I este:
a) e^{-4}; b)e^{-3}; c)e^{-2}; d)e^{-1}; e)0.

96. Se da $I_n=\int_0^n dt/[(t+2)(\sqrt{(1+t)}+1)]$, $n\in N$. a) Calculati I_n; b) Calculati $\lim\limits_{n} I_n$.
2

97. Fie $f:R\to R$, $f(x)=(4+x)/\sqrt{(9+x^2)}$ si $I=\int_{1} f(x)\,dx$. Atunci:

a)I=1; b)I=-1; c)I=0; d)I=3; e)alta varianta.

98. Valoarea integralei $\int_1^2 \sqrt{(x^2+x^3)}\,dx$ este: a)$2\sqrt{3}-\sqrt{2}$; b)$2\sqrt{2}$; c)1; d)$2/15(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$; e)$4/15(6\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

99. Fie F o primitiva a fctiei $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, f continua pe $(0,\infty)$ si care satisface proprietatile: $2x\,F(x)=f(x)$, $\forall\ x>0$ si $f(\ln 2)=8(\ln 2)e^{\ln^2 2}$. Dc. $T=f(1)$ si $I=\int_1^2 f(x)\,dx$, at:

1° a)$T=e+\ln 2$; b)$8e$; c)$e^{-\ln^2 2}$; d)$2e^2$; e)$2\ln^2 2$.
2° a)$I=e^3+1$; b)e^4-1; c)e^2-3; d)$4e(e^3-1)$; e)e^4+e^3+1. (ASE '2000)

100. Fie $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\max\limits_{y\in[0,1]}(x-y)^2$. Dc. S= suma derivatelor laterale ale lui f in $x_o=1/2$ si $I=\int_0^1 f(x)\,dx$, at:

1°a) S=-1; b)-1/2; c)0; d)1/2; e)1.
2°a) I=5/12; b)3/4; c)1/3; d)7/12; e)7/6. (ASE '00)

101. Fie $f:R\to R$, unde $f_m(x)=\sqrt[3]{(x^2+(m-2)x-m+2)}$, $m\in R$. Fie $A=\{m\in R \mid f'm:R\to R\}$ Pt. $m\in A$, fie $I(m)=\int_{(2-m)/2}^{(3-m)/2} 1/f^3(x)\,dx$ si $L=\lim\limits_{m\to 1} I(m)$. At.:

1° a)A=(-1,3); b)$(2,\infty)$; c)(-2,2); d)$(-\infty,-1)\cup[3,\infty)$; e)$(-\infty,-2)\cup[2,\infty)$.
2° a)$L=1/\pi\sqrt{3}$; b)$(\pi+1)/6$; c)$\pi/3$; d)$\pi\sqrt{3}/9$; e)$\pi\sqrt{3}$. (ASE '00)

102. Fie $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x^2-x)}, & x\geq 1\\ x^2-x, & x<1\end{cases}$

a) Aratati ca f admite primitive.
b) Calculati o primitiva a lui f.

103. I. Fie $f:D\subset R\to R$, $f(x)=a\sqrt{(x+1)}+b\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(x+3)}$, unde $a,b\in R$ si D-domeniu max. de def.

a) Pt. a=-1 si b=0 reprezentati grafic fctia f.
b) Aratati ca $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\,dx=0 \Leftrightarrow a+b+1=0$

II. Fie $I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$, $n\in N^*$.

a) Calculati I_2;
b) Dem.ca $(I_n)_{n\geq 1}$ e convergent si calculati $\lim\limits_{n} I_n$.

104. I. Fie $a\in R$, $a>0$ si $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=(x^2+a^2)/2x$.

i) Studiati monotonia fctiei f.

ii) Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, def. prin $x_{n+1}=(xn^2+a^2)/2xn$, cu $x_o>a$. Sa se studieze monotnia si convergenta sirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Sa se calculeze limita sirului. Ce se poate spune dc. $0<x_o<a$?

II. Fie $n\geq 0$, $n\in N$ si fie $I_n=\int x^n e^x\,dx$.

i) Calculati I_1, I_2.

ii) Stabiliti legatura intre I_n si I_{n+1}

iii) Aratati ca $I_n\leq e-1$, $\forall\ n\geq 0$. (MATE '01)

105. Calculati $\int_1^{\sqrt{3}} dx/x2(x2+1)$. a)$\pi/3+2/\sqrt{3}$; b)$\pi/12+1\sqrt{3}$; c)$\pi/6-1/\sqrt{3}$; d)$-\pi/3-2\sqrt{3}$; e)$(\sqrt{3}-1)/\sqrt{3}-\pi/12$.

106. 1. Fie f:D→R, $f(x)=\sqrt{(ax^2+bx+c)}$, $x\in D$. Fctia f admite unextrem egal cu $\sqrt{3}/2$ si are asimptota oblica $y=-x+1/2$ la $-\infty$ dc.: a)a=-1, b=1, c=0; b)a=b=c=1; c)a=c=1, b=-1; d)a=b=1, c=-1; e)a=c=1, b=3.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_n^{2n} (x+1)/\sqrt{(x^6+1)}\,dx$ este: a)1; b)1/2; c)2; d)1/4; e)3/4.

107. Fie f:R\{1}→R, $f(x)=(ax^2+bx+2)/(x-1)$, unde $a,b\in R$.

i) Det. a,b a.i graficul fctiei f admite ca asimptota oblica dreapta de ec. $y=x+2$

ii) Pt. a=b=1 sa se studieze variatia fctiei f si sa se reprezinte grafic.

iii) Calculati aria multimii marginite de graficul fctiei f, asimptota oblica si dreptele de ec. x=2 si x=3.

108. Fie $I_m=\int_0^{\pi/2} \sin^m x/(\sin^m x+\cos^m x)\,dx$, $m\in N$.

a) Calc. I_1, I_2.

b) Aratati ca I_m=ct., $\forall\ m\in N$.

109. a) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \int_n^{2n} x/(1+x^5)\,dx$. a)1/24; b)-7/24; c)5/24; d)7/24; e)3/8.

b) Fie a<b si f:[0,b-a]→R, continua pe [0,b-a]. Sa se calculeze

$\int_a^b f(x-a)/[f(x-a)+f(b-x)]\,dx$ in fctie de a si b.

a)(b-a)/2; b)b-a; c)a-b; d)(a-b)/4; e)(b-a)/3.

110. 1. Se considera fctia f:R→R, $f(x)=x-\sqrt{|x^2+x|}$. Sa se determine multimile: $D=\{x_o\in R;\ f$ derivabila in $x_o\}$, $E=\{x_o\in R;\ x_o$-pct de extrem pt. $f\}$ si intervalele de monotonie ale fctiei.

2. Sa se calculeze $I=\int e^{\operatorname{arctg} x}/(1+x^2)^{3/2}\,dx$.