CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/ CATEDRELOR DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

**- Etapa pentru suplinire -**

**4 august 2011**

Probă scrisă la **MATEMATICĂ** VARIANTA 1

Profesori

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

**SUBIECTUL I** **( 30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **a)** $\Delta = -4\left(m^2+4m+2\right)$<br>$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right]$<br>$m=-3$ | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| | **b)** $x_1+x_2+2x_1x_2 = m^2+3m+1$<br>$m \in (-3,-2) \cup (-1,0)$ | **2p**<br>**3p** |
| | **c)** Fie $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația are soluția $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow m^2+(2a+4)m+2a^2+4a+3=0$<br>$\Delta_a = 4\left(1-a^2\right) \geq 0 \Rightarrow a \in \{\pm 1, 0\}$<br>$m \in \{-3,-1\}$ | **1p**<br>**1p**<br>**1p** |
| | **d)** $\Delta = -4\left(m^2+4m+2\right) = -4\left((m+2)^2-2\right) = 4\left(2-(m+2)^2\right)$.<br>Fie $t=m+2$. Alegem $t=\frac{7}{5}$ pentru ca $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2-t^2} \in \mathbb{Q}_+$; $m=-\frac{3}{5}$ este un exemplu | **1p**<br>**1p** |
| **2.** | **a)** $A \leq \frac{\pi}{2}$<br>$B+C=\pi-A$<br>Finalizare | **1p**<br>**2p**<br>**2p** |
| | **b)** $AB=AC=a \Rightarrow BC=a\sqrt{2}$<br>$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi $r=\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$<br>$R+r=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=a$, deci $AB+AC=2(r+R)$ | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| | **c)** $\frac{\pi}{2} \geq B \geq \frac{\pi}{2}-C \geq 0$<br>Funcția sin este crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin B \geq \sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\cos C$ | **1p**<br>**2p** |
| | **d)** $\sin B \geq \cos C$, $\sin C \geq \cos B \Rightarrow 0 \leq 1-\sin B \leq 1-\cos C$, $0 \leq 1-\sin C \leq 1-\cos B$<br>$(1-\sin B)(1-\sin C) \leq (1-\cos C)(1-\cos B) \Rightarrow \sin B+\sin C \geq \cos A+\cos B+\cos C$ | **1p** |

| | | |
|---|---|---|
| | Cum $\cos A+\cos B+\cos C=\frac{r}{R}+1$ şi $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=2R$, rezultă $AB+AC=2R(\sin C+\sin B)\geq 2R\left(1+\frac{r}{R}\right)=2(R+r)$ | 1p |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **a)** $p-1$ este număr par<br>$f(-1)=1$ | **3p**<br>**2p** |
| | **b)** $z^{p-1}+z^{p-2}+...+z+1=0\Rightarrow(z-1)\left(z^{p-1}+z^{p-2}+...+z+1\right)=0$<br>$z^p=1\Rightarrow\|z\|=1$ | **3p**<br>**2p** |
| | **c)** $f(2)=2^p-1$<br>Cum $2^p\equiv 2(\bmod p)\Rightarrow 2^p-1\equiv 1(\bmod p)$, deci restul este egal cu 1 | **2p**<br>**1p** |
| | **d)** $q\,/\,3^{p-1}+3^{p-2}+...+3+1\Rightarrow q\,/\,3^p-1\Rightarrow\hat{3}^p=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_q$<br>Dacă $\hat{3}=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_q$, rezultă $q\|2\Rightarrow q=2$, fals pentru că $f(3)$ este impar<br>Dacă $\hat{3}\neq\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_q$, rezultă că ordinul lui $\hat{3}$ în grupul $\left(\mathbb{Z}_q^*,\cdot\right)$ este $p$, deci $p\,/\,q-1$ | <br>**1p**<br>**1p** |
| **2.** | **a)** g este derivabilă pe $\mathbb{R}$<br>$g'(x)=2-\frac{2}{1+x^2}=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ | **1p**<br>**4p** |
| | **b)** $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=2$<br>$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x)-mx\right)=-\pi$, deci $y=2x-\pi$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$ | **2p**<br>**3p** |
| | **c)** $a_n=\int_0^n\frac{2x^2}{x^2+1}dx=\int_0^n\left(2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx=$<br>$=2n-2\operatorname{arctg}x\Big\|_0^n=2n-2\operatorname{arctg}n$ | **1p**<br>**2p** |
| | **d)** $\frac{2n-a_n}{\pi}=\frac{2\operatorname{arctg}n}{\pi}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\operatorname{arctg}n}{\pi}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\operatorname{arctg}n-\pi}{\pi}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\operatorname{arctg}n-\pi}{\pi}\cdot n}$<br>Deoarece $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\pi}(2\operatorname{arctg}n-\pi)=-\frac{2}{\pi}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-a_n}{\pi}\right)^n=e^{-\frac{2}{\pi}}$ | **1p**<br>**1p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

- câte 1 punct pentru precizarea fiecăruia dintre cele patru elemente cerute **4x1p=4 puncte**

[Punctajul se acordă doar în situația în care candidatul a corelat elementele cerute cu conținutul testului proiectat pentru evaluarea sumativă la finalul anului şcolar.]

- câte 2 puncte pentru proiectarea corectă metodico-ştiințifică, adecvată evaluării sumative la finalul anului şcolar, a fiecăruia dintre cei şase itemi construiți **6x2p=12 puncte**
- calitatea structurării testului **2 puncte**
- câte 2 puncte pentru proiectarea corectă a baremului de evaluare şi de notare a fiecăruia dintre cei şase itemi construiți **6x2p=12 puncte**