

Universitatea din Craiova
Concurs de admitere - iulie 2005
Ingineri, Facultatea A.C.E.

Proba scrisă
la disciplina Algebră și Elemente de Analiză matematică

I Fie ecuația $x^2 - 2x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

1. Rezolvați ecuația pentru $m = -3$
2. Determinați m astfel încât ecuația să aibă rădăcini reale strict pozitive.
3. Determinați m astfel încât funcția $f(x) = x^2 - 2x + m$ să aibă valoarea minimă 0.

II Se consideră sistemul:
$$\begin{cases} x - 2y + z = m - 3 \\ 2x + y = 4 \\ mx + y - z = 2 \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

1. Să se rezolve sistemul pentru $m = -4$
2. Să se studieze compatibilitatea sistemului pentru $m \in \mathbb{R}$.

III Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

1. Să se calculeze $f(1)$
2. Să se arate că $(x-1)f(x) = x^5 - 1$
3. Să se arate că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$
4. Să se arate că dacă $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ atunci $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$
5. Să se arate că F este bijectivă.

IV Fie $f(x) = \frac{x^2}{ax+1}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{a}\}$.

1. Să se determine a încât $f'(-2) = 0$.
2. Să se reprezinte grafic funcția pentru $a = 1$
3. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$ și să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n+k} = -\frac{1}{2} + \ln 2.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.