

CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/ CATEDRELOR
DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
13 IULIE 2011

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

VARIANTA 2

Profesori

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr natural nenul n notăm cu a_n ultima cifră a numărului $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

5p a) Arătați că $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \geq 1$.

5p b) Calculați a_7 .

3p c) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este periodic de perioadă 20.

2p d) Calculați a_m , pentru $m = 2011^{2011}$.

2. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și A' , B' , respectiv C' , mijloacele arcelor mici \widehat{BC} , \widehat{CA} , respectiv \widehat{AB} ale cercului circumscris triunghiului ABC . Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

5p a) Demonstrați că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente.

5p b) Arătați că triunghiul BIA' este isoscel.

3p c) Demonstrați că punctul I este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$.

2p d) Demonstrați că $AI = IA'$ dacă și numai dacă $r = R(1 - \cos A)$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC , iar R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Fie mulțimea $M = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5p a) Verificați dacă $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \in M$.

5p b) Arătați că, dacă $x, y \in M$, atunci $x + y - xy \in M$.

3p c) Fie $x = a + b\sqrt{5} \in M$, $x \neq 0$. Arătați că $\frac{1}{x} \in M$ dacă și numai dacă $|a^2 - 5b^2| = 1$.

2p d) Arătați că există o infinitate de elemente $x \in M$ astfel încât $\frac{1}{x} \in M$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$.

5p a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

5p b) Calculați $\int f(x) \sin x dx$, $x \in \mathbb{R}$.

3p c) Demonstrați că funcția f nu are limită la $+\infty$.

2p d) Calculați $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Proiectați un test scris, însoțit de baremul de evaluare și de notare, pentru evaluarea sumativă la finalul anului școlar, la disciplina/una dintre disciplinele la care susțineți concursul, pentru învățământul gimnazial/liceal.

În vederea acordării punctajului:

- veți menționa următoarele elemente: disciplina/modulul de pregătire profesională, clasa, capitolele/conținuturile și timpul de lucru;
- veți construi 2 itemi de tip pereche, 2 itemi de tip răspuns scurt/de completare, 1 item de tip întrebare structurată și 1 item de tip eseu/ rezolvare de probleme;
- veți redacta un barem în care se distribuie 90 de puncte și se acordă 10 puncte din oficiu.

CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/ CATEDRELOR
DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
13 IULIE 2011

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

VARIANTA 2

Profesori

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) Verificarea pentru $n = 1$ Justificarea faptului că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \geq 1$	1p 4p
	b) $1^2 + 2^2 + \dots + 7^2 = \frac{7(7+1)(2 \cdot 7 + 1)}{6} = 140$ $a_7 = 0$	3p 2p
	c) Cum $(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+20)^2 = 20n^2 + 20 \cdot 21n + \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} =$ $= 10(2n^2 + 42n + 287)$ se divide cu 10, rezultă că $a_{n+20} = a_n$, $\forall n \geq 1$	2p 1p
	d) $2011^{2011} \equiv 11 \pmod{20}$ $a_m = a_{11} = 6$	1p 1p
2.	a) AA' , BB' , CC' sunt bisectoarele interioare ale triunghiului ABC , deci dreptele sunt concurente	4p 1p
	b) $\sphericalangle BIA' = \frac{1}{2}(\widehat{AB'} + \widehat{A'B}) =$ $= \frac{1}{2}(\widehat{B'C} + \widehat{CA'}) = \sphericalangle IBA'$, deci triunghiul BIA' este isoscel	2p 2p 1p
	c) $\sphericalangle(AA', B'C') = \frac{1}{2}(\widehat{C'A} + \widehat{A'B'}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ Finalizare	2p 1p
	d) $IA' = BA' = 2R \sin \frac{A}{2}$ și $IA = \frac{bc}{p} \cos \frac{A}{2}$ $AI = IA' \Leftrightarrow \frac{bc}{p} \cos \frac{A}{2} = 2R \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{S}{p} = 2R \sin^2 \frac{A}{2} \Leftrightarrow r = R(1 - \cos A)$	1p 1p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} =$ $= 1 + \sqrt{5} \in M$	3p 2p
	b) Fie $x = a + b\sqrt{5}$ și $y = c + d\sqrt{5}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $x + y - xy = a + b\sqrt{5} + c + d\sqrt{5} - (ac + 5bd) - (ad + bc)\sqrt{5} =$ $= a + c - ac - 5bd + (b + d - ad - bc)\sqrt{5}$ Cum $a + c - ac - 5bd \in \mathbb{Z}$ și $b + d - ad - bc \in \mathbb{Z}$, rezultă că $x + y - xy \in M$	2p 2p 1p

	<p>c) Fie $x = a + b\sqrt{5}$ cu $a^2 - 5b^2 = 1$. Dacă $a^2 - 5b^2 = 1 \Rightarrow x(a - b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2 = 1$, deci $\frac{1}{x} \in M$, iar dacă $a^2 - 5b^2 = -1 \Rightarrow x(-a + b\sqrt{5}) = -a^2 + 5b^2 = 1$, deci $\frac{1}{x} \in M$</p> <p>Reciproc, fie $x = a + b\sqrt{5} \in M$, $x \neq 0$. Cum $\frac{1}{x} = \frac{a - b\sqrt{5}}{a^2 - 5b^2} = \frac{a}{a^2 - 5b^2} + \frac{-b}{a^2 - 5b^2}\sqrt{5} \in M$,</p> <p>rezultă că $a^2 - 5b^2 a$ și $a^2 - 5b^2 b$, deci $(a^2 - 5b^2)^2 a^2$ și $(a^2 - 5b^2)^2 b^2$, de unde $(a^2 - 5b^2)^2 a^2 - 5b^2$. Obținem $a^2 - 5b^2 1$, deci $a^2 - 5b^2 = 1$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>d) Fie $x_0 = 9 + 4\sqrt{5}$. Cum $\frac{1}{x_0} = \frac{1}{9 + 4\sqrt{5}} = 9 - 4\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{x_0} \in M$</p> <p>$x \cdot y \in M$, $\forall x, y \in M \Rightarrow x_0^n \in M$ și $\frac{1}{x_0^n} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_0^n < x_0^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă concluzia</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
2.	<p>a) Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $F'(x) = f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$</p> <p>Cum $\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow F'(x) \geq \frac{1}{4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare pe \mathbb{R}</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
	<p>b) $\int \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx = -\int (\ln(3 + \cos x))' dx =$ $= -\ln(3 + \cos x) + C$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>c) Fie $x_n = 2n\pi$ și $y_n = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$,</p> <p>$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ și cum $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$, rezultă concluzia</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>d) Deoarece f este continuă, pară și periodică de perioadă 2π, avem</p> $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{\pi - \varepsilon} f(x) dx.$ <p>Cu substituția $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in [0, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, rezultă</p> $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \sqrt{2} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big _0^{\operatorname{tg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}} = \sqrt{2} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$	<p>1p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- câte 1 punct pentru precizarea fiecăruia dintre cele patru elemente cerute **4x1p=4 puncte**
[Punctajul se acordă doar în situația în care candidatul a corelat elementele cerute cu conținutul testului proiectat pentru evaluarea sumativă la finalul anului școlar.]
- câte 2 puncte pentru proiectarea corectă metodico-științifică, adecvată evaluării sumative la finalul anului școlar, a fiecăruia dintre cei șase itemi construiți **6x2p=12 puncte**
- calitatea structurării testului **2 puncte**
- câte 2 puncte pentru proiectarea corectă a baremului de evaluare și de notare a fiecăruia dintre cei șase itemi construiți **6x2p=12 puncte**