

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică
Ingineria și Servicierea iulie 2003

Probă de concurs: Algebră și Elemente de Analiză Matematică

1) a) Discutați după parametri $m, n \in \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+my+iz=1 \\ x+y+nz=m \end{cases}$$

b) Rezolvați sistemul pentru $m=1$ și $n=2$.

2) Pe mulțimea $G=(2, +\infty)$ se definește legea de compoziție

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6.$$

a) Arătați că $(G, *)$ este grup comutativ.

b) Determinați toate izomorfismele $f: \mathbb{R} \rightarrow G$ de forma

$$f(x) = e^{\alpha x} + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$

Se notează:

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{2^{n!}} + \frac{1}{2^{2^{n!}}} + \dots + \frac{1}{2^{n^{n!}}} \quad n \in \mathbb{N}$$

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și determinați

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

b) Arătați că șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și $b < a$, unde $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \ln(1+e^x)$.

a) Arătați că f este bijectivă.

b) Stabiliți o relație între $f(x)$ și $f(-x)$.

c) Reprezentați grafic funcția f .

d) Calculați $I_n = \int_{-1}^1 x^{2n+1} f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Notă: Toate subiectele sînt obligatorii
Timp de lucru 3 ore.