

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Arad, 28.05.2011

Clasa a V-a

Problema 1. Într-o familie sunt 3 frați care sunt elevi. La sfârșitul fiecărui an școlar fiecare copil primește un număr de cărți egal cu numărul clasei absolvite. După sfârșitul anului școlar 2010-2011, cei trei frați vor avea împreună 72 de cărți. Ce clasă va absolvi în anul 2011 fiecare dintre cei trei frați? (În fiecare an școlar cei trei frați promovează clasa.)

Soluție. Fie x, y și z ultima clasă absolvită de cei trei frați. Cei trei frați au primit până acum $1 + 2 + \dots + x$, $1 + 2 + \dots + y$ respectiv $1 + 2 + \dots + z$ cărți. Deoarece $1 + 2 + \dots + n \in \{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78\}$ pentru orice $n \in \{1, 2, \dots, 12\}$, trebuie să-l scriem pe 72 ca sumă de trei numere din mulțimea $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66\}$.

Găsim variantele: $66 + 3 + 3$, $45 + 21 + 6$ și $36 + 21 + 15$.

În primul caz, cel mai mare copil va absolvi clasa a XI-a, iar cei doi frați mai mici clasa a II-a.

În al doilea caz copiii vor absolvi clasele a IX-a, a VI-a, respectiv a III-a.

În al treilea caz copiii vor absolvi clasele a VIII-a, a VI-a, respectiv a V-a.

Problema 2. Două numere prime se numesc *gemene* dacă diferența lor este egală cu 2.

Determinați numerele naturale m și n pentru care $2m^4 + 3$ și $2n^4 + 5$ sunt numere prime gemene.

Soluție. Dacă $2m^4 + 3 > 2n^4 + 5$, adică $2m^4 + 3 = 2n^4 + 7$, rezultă $m^4 = n^4 + 2$. Dacă $u(N)$ este ultima cifră a numărului natural N , atunci $u(N^4) \in \{0, 1, 5, 6\}$, deci $u(m^4) \neq u(n^4 + 2), \forall m, n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că acest caz este imposibil. Dacă $2m^4 + 3 < 2n^4 + 5$, adică $2m^4 + 5 = 2n^4 + 5$, rezultă $m = n$. Avem $u(2m^4) \in \{0, 2\}$. Dacă $u(2m^4) = 0$, atunci $u(2m^4 + 5) = 5$ și, cum $2m^4 + 5$ e număr prim, rezultă $2m^4 + 5 = 5$, adică $m = 0$, pentru care se obține $2m^4 + 3 = 3$ număr prim. Dacă $u(2m^4) = 2$, atunci $u(2m^4 + 3) = 5$ și, cum $2m^4 + 3$ e număr prim, rezultă $2m^4 + 3 = 5$, adică $m = 1$, pentru care se obține $2m^4 + 5 = 7$ număr prim.

Problema 3. Împărțim mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$ în două submulțimi nevide M și N astfel încât:

(i) $M \cap N = \emptyset$ și $M \cup N = A$;

(ii) suma m a elementelor lui M este mai mare sau egală decât suma n a elementelor lui N ;

(iii) pentru orice $x \in M$ avem $x + 10 \in M$ sau $x - 10 \in M$.

Determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua diferența $m - n$.

Soluție. Deoarece $m + n = 1 + 2 + \dots + 19 = 190$, rezultă că $m - n$ este număr par. Dacă $m - n = 0$, rezultă $m = n = 95$.

Mulțimea M este reuniune de mulțimi de forma $\{x, \overline{1x}\}$, având suma pară, deci m este număr par, prin urmare $m \neq 95$, deci $m - n \neq 0$. Un exemplu cu $m - n = 2$ este $M = \{1, 11, 3, 13, 8, 18, 5, 15, 6, 16\}$ și $N = A \setminus M$.

Problema 4. a) Arătați că, oricum am așeza numerele de la 1 la 10 pe un cerc, există trei numere alăturate cu suma mai mare sau egală cu 18.

b) Dați exemplu de o așezare a numerelor de la 1 la 10 pe un cerc, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie cel mult egală cu 18.

Soluție. a) Presupunem că suma oricăror trei numere alăturate este cel mult 17. Eliminându-l pe 1, celelalte 9 numere pot fi împărțite în trei grupe de câte trei numere alăturate, fiecare având, conform presupunerii făcute, suma cel mult 17. Ca urmare, suma numerelor de pe cerc este cel mult egală cu $1 + 3 \cdot 17 = 52$, contradicție cu $1 + 2 + \dots + 10 = 55$.

b) O posibilă configurație este 1, 10, 6, 2, 9, 5, 4, 8, 3, 7.