CLASA a VI-a

Problema 1. Determinaţi cifrele a, b, c, m, n, p pentru care:

$$\overline{0,(abc)} \cdot \overline{1,(mnp)} = 1.$$

Soluţie. Egalitatea din enunţ este echivalentă cu $\overline{abc} \cdot (999 + \overline{mnp}) = 37^2 \cdot 3^6$.

Deoarece $37^2 = 1369 > \overline{abc}$, sunt posibile două cazuri:

a) Dacă $37|\ \overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 37 \cdot 3^k$, $k \leq 2$ (pentru $k \geq 3$ s-ar obţine $\overline{abc} \geq 999$, imposibil).

Atunci $\overline{abc} \leq 333$, de unde $999 + \overline{mnp} \geq 2997$, imposibil.

b) Dacă $37 \not|\ \overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 3^k$, $k \leq 6$.

Cum $999+\overline{mnp} \leq 999+998 = 1997$, rezultă $\overline{abc} \geq \frac{999^2}{1997}$, deci $\overline{abc} \geq 500$.

Ca urmare $\overline{abc} = 3^6 = 729$, pentru care se obţine $\overline{mnp} = 370$.

Problema 2. Considerăm numerele naturale nenule a, b şi c astfel încât

$$(a+1)^b = (a+25)^c.$$

Demonstraţi că $b + c$ este multiplu de 4.

Soluţie. Este evident că $b > c$, deci putem scrie $(a+25)^c = (a+1)^c \cdot (a+1)^{b-c}$, de unde $(a+1)^c|(a+25)^c$, adică $a+1|a+25$.

Obţinem $a+1|24$, deci $a \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 23\}$.

Dacă $a = 1$, atunci obţinem $2^b = 2^c 13^c$ – imposibil.

Dacă $a = 2$ obţinem $3^b = 27^c$, de unde $b = 3c$, $c \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a = 3$, atunci obţinem $4^b = 4^c 7^c$ – imposibil.

Dacă $a = 5$, atunci obţinem $2^b 3^b = 2^c 3^c 5^c$ – imposibil.

Dacă $a = 7$, obţinem $8^b = 32^c$, de unde $b = 5k$, $c = 3k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a = 11$, atunci obţinem $2^{2b} 3^b = 2^{2c} 3^{2c}$ – imposibil (ar trebui $b = c$ şi $b = 2c$).

Dacă $a = 23$, atunci obţinem $2^{3b} 3^b = 2^{4c} 3^c$ – imposibil (ar trebui $b = c$ şi $3b = 4c$).

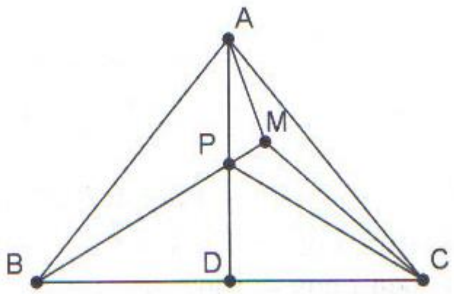
În ambele cazuri posibile, $b + c$ este multiplu de 4.

Problema 3. Triunghiul isoscel ABC de bază BC are $m(\angle B) > 30°$. În interiorul triunghiului considerăm punctul M aşa încât $m(\angle MBC) = 30°$ şi $m(\angle MAB) = \dfrac{3}{4} m(\angle BAC)$. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle AMC$.

Soluţie. Construim bisectoarea $(AD$ a unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$ şi notăm $\{P\} = AD \cap BM$.

Cum triunghiul ABC este isoscel, $(AB = AC)$, rezultă că AD este mediatoarea segmentului $[BC]$. În consecinţă, triunghiul BPC este isoscel şi $m(\angle BPD) = m(\angle DPC) = 60°$. De aici, $m(\angle APM) = m(\angle CPM) = 60°$.

Din $m(\angle BAM) = \frac{3}{4}m(\angle BAC)$, obţinem $m(\angle PAM) = m(\angle MAC) = \frac{1}{4}m(\angle BAC)$.



Aşadar, $(AM$ şi $(PM$ sunt bisectoarele unghiurilor PAC şi APC din triunghiul APC, de unde rezultă că $(CM$ este bisectoarea unghiului $\angle PCA$.

Din triunghiul MAC obţinem

$$\begin{aligned} m(\angle AMC) &= 180° - \frac{1}{2}\left(m(\angle PAC) + m(\angle(PCA)\right) \\ &= 180° - \frac{1}{2}\left(180° - 120°\right) = 150°. \end{aligned}$$

Problema 4. a) Arătaţi că este posibil să aşezăm pe un rând 20 de numere întregi nenule (nu neapărat diferite) cu suma strict pozitivă, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie strict negativă.

b) Demonstraţi că nu se pot aşeza pe un cerc 20 de numere întregi cu suma strict pozitivă astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie strict negativă.

Soluţie. a) Un exemplu este:

$$17, -9, -9, 17, -9, -9, ..., 17, -9, -9, 17, -9.$$

b) Presupunem că numerele $a_1, a_2, ..., a_{20}$ sunt aşezate pe cerc în această ordine, în sensul mişcării acelor de ceasornic, a_1 fiind cel mai mare număr.

Dacă $a_1 < 0$, atunci toate numerele sunt negative, deci suma lor este negativă.

Dacă $a_1 > 0$, atunci $a_2 + a_3 < 0$, deci

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_{20} = (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + ... + (a_{19} + a_{20} + a_1) < 0.$$