MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011

CLASA a IV-a

SUBIECTUL 1

Aflaţi diferenţa dintre numerele naturale a şi b ştiind că ele verifică egalităţile:

$$[(4+a:3):12+5]\times 4-26=42$$

$$[(b+7):25-8]\times 8+5=37$$

Gheorghe Lobonţ

SUBIECTUL 2

Suma a două numere naturale este 225. Dacă pe primul număr îl înmulţim cu 2, iar pe al doilea număr îl împărţim la 2, obţinem numere egale. Care sunt numerele?

Eugenia Miron

SUBIECTUL 3

În urmă cu 7 ani, suma vârstelor fraţilor Mariei era de 9 ani. Acum suma vârstelor fraţilor ei este de 37 ani. Câţi fraţi are Maria?

Ioan Groza

SUBIECTUL 4

La concursul de matematică ”Marian Ţarină”, ediţia a 10-a, au participat 272 elevi, dintre care 258 au rezolvat prima problemă, 250 au rezolvat a doua problema, 163 au rezolvat a treia problemă şi 149 au rezolvat a patra problemă. Arătaţi că cel puţin patru elevi au rezolvat toate problemele.

Vasile Şerdean

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Determinaţi toate numerele naturale $\overline{abcd}$ cu proprietatea că $\overline{ab}-\overline{ba}=36$ şi $\overline{dc}+\overline{cd}=33$.

Monica Fodor

SUBIECTUL 2

Fie numărul:

$A=91992999399994.....999...92006$

a) Calculaţi suma cifrelor numărului *A*.

b) Care este cifra de pe locul *108* ?

c) Determinaţi câte cifre de 9 conţine numărul *A*.

Ioan Groza, Cristian Pop

SUBIECTUL 3

Suma a trei numere naturale este *349*. Împărţind primul număr la al doilea obţinem câtul *4* şi restul *5*, iar împărţind al doilea număr la al treilea obţinem câtul *7* şi restul *4*. Să se afle numerele.

Gheorghe Lobonţ, Lucia Iepure

SUBIECTUL 4

Se consideră 10 numere naturale nenule (nu neapărat diferite) şi calculăm toate sumele posibile formate din câte 9 dintre aceste numere şi obţinem: 83, 84, 85, …, 90, 91 (sumele care se repetă le scriem o singură dată). Aflaţi cele 10 numere.

Vasile Şerdean

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011
CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Fie x, y, z trei numere întregi pozitive cu proprietatea că primele două sunt direct proporţionale cu 2 şi 3, iar ultimele două sunt invers proporţionale cu $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{5}$. Studiaţi dacă produsul lor este cub perfect, când suma numerelor este 100.

Monica Fodor, Ancuţa Nechita

SUBIECTUL 2

a) Fie

$$x=1+2+2^2+...+2^{2011},\quad y=1+3+3^2+...+3^{2011};\ z=1+10+10^2+...+10^{2011}.$$

Scrieţi în ordine crescătoare numerele: $1+9z$; $(2y+1)^2$; $(x+1)^3$.

b) Să se arate că fracţia $\frac{5c+8}{3c+5}$ este ireductibilă, $(\forall)\, c\in N$.

Vasile Şerdean, Monica Fodor

SUBIECTUL 3

Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine), astfel încât $(AB)\equiv(CB)\equiv(CD)$. Fie E un punct esterior dreptei d, astfel încât $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle EDA$. În triunghiul EDA se construiesc medianele $(AF)\ (F\in(ED))$ şi $(DP)\ (P\in(AE))$. Să se arate că:

a) E aparţine mediatoarei segmentului (BC);

b) $(AF)\equiv(DP)$

c) $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle DFC$

d) $\sphericalangle PBE \equiv \sphericalangle FCE$.

* * *

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A şi inălţimea AD, $D\in(BC)$. Fie $(BE$ bisectoarea unghiului B. Dacă $AD\cap BE=\{T\}$, $TE=6$cm şi $DT=3$cm, calculaţi măsura unghiului C .

Vasile Şerdean, Camelia Magdaş

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\geq 8abc$$

b) Utilizând eventual punctul a), demonstraţi că: $\left(a_1^2+1\right)\left(a_2^2+1\right)\left(a_3^2+1\right)\ldots\left(a_n^2+1\right)\geq 2^n$ dacă $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$.

* * *

SUBIECTUL 2

Să se arate că $\frac{1}{671}+\frac{1}{672}+\ldots+\frac{1}{2011}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{2009\cdot 2010\cdot 2011}$

Vasile Şerdean

SUBIECTUL 3

În triunghiul ABC se consideră punctul D pe segmentul (BC). Fie E şi F simetricele punctului D faţă de dreptele AB respectiv AC.

a) Demonstraţi că $m(\prec EAF)$ este constantă oricare ar fi poziţia punctului D pe latura (BC).

b) Determinaţi poziţia punctului D pe segmentul (BC) astfel încât perimetrul triunghiului AEF să fie minim.

c) Arătaţi că $EF<2AD$.

d) Care este poziţia punctului D pe (BC) astfel încât $AD\perp EF$?

Ioan Groza, Lucia Iepure

SUBIECTUL 4

Se consideră punctul M în interiorul triunghiului echilateral ABC şi P,L,K proiecţiile sale pe (AB), (BC), respectiv (AC). Calculaţi aria triunghiului ABC ştiind că $AP=8$, $BL=12$ şi $CK=7$.

Vasile Şerdean , Gheorghe Lobonţ

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Fie $a,b \in R_+$, $x \in [0, 3a]$ şi $y \in [0, 2b]$. Demonstraţi că are loc egalitatea:

$$(x-y)^2 + \left(\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}\right)^2 \leq 13\left(a^2+b^2\right).$$

Ştefania Mustea, Monica Fodor

SUBIECTUL 2

a) Ştiind că $x^3-3xy^2=10$ şi $y^3-3x^2y=198$, calculaţi x^2+y^2.

b) Să se determine cifra n din numărul $x=1,n12$ care are proprietatea că

$$2d(x)+x=2,488,$$

unde $d(x)$ notează distanţa de la x la cel apropiat număr întreg faţă de x.

Vasile Şerdean, Dorel I. Duca

SUBIECTUL 3

Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia de lungime a. Calculaţi:

a) Distanţa de la punctul B la dreapta $A'D$.

b) Cosinusul unghiului format de planele $(O'AC)$ şi $(O'AB)$ unde $\{O'\}=A'C'\cap B'D'$.

c) Distanţa de la punctul A la planul $(O'BC)$.

d) Aria secţiunii determinată în cub de planul $(O'BC)$.

Monica Fodor, Ioan Groza

SUBIECTUL 4.

O piramidă triunghiulară $VABC$ are aria bazei ABC egală cu 16. Feţele laterale VAB, VAC, VBC au respectiv ariile 10, 10, 12 şi fac acelaşi unghi cu planul bazei. Să se calculeze volumul piramidei $VABC$.

Vasile Şerdean , Cristian Pop

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011

CLASA a IX-a

SUBIECTUL 1

Fie $n \geq 1$ un număr natural.

a) Arătaţi că restul împărţirii lui $4^{4\cdot 5^{n-1}}$ la 5^n este 1.

b) Arătaţi că dacă numărul natural $m \geq 1$ are proprietatea că restul împărţirii lui m^5 la 5^n este 1, atunci restul împărţirii lui m la 5^{n-1} este 1.

Dorel I. Duca

SUBIECTUL 2

Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$ respectiv $\hat{C}$ se intersectează două câte două în punctele A', B' respectiv C' (A şi A' sunt separate de dreapta BC, B şi B' sunt separate de dreapta CA, C şi C' sunt separate de dreapta AB). Notăm cu R_A, R_B respectiv R_C razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $A'BC$, $B'CA$ respectiv $C'AB$. Să se demonstreze

$$R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 = 2R(2R - r),$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC iar r este raza cercului înscris în triunghiul ABC.

Daniel Văcăreţu

SUBIECTUL 3

Fie a, b, c, x, y, z numere reale strict pozitive. Să se arate că

$$(a+x)(b+y)(c+z) + 4\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz}\right) \geq 20.$$

Dumitru Săvulescu, Lucian Tuţescu , G.M. nr. 6/2010

SUBIECTUL 4

Fie $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$. Funcţia satisface condiţiile $f(-2) \leq -2$, $f(-1) \geq 0$, $f(1) < -1$.

Răspundeţi la următoarele întrebări:

a) punctul de extrem al funcţiei f este de maxim sau de minim? Justificaţi.

b) Dacă x_0 este punct de extrem al funcţiei , atunci $x_0 < 0$ sau $x_0 > 0$? Justificaţi.

c) Graficul funcţiei f poate trece prin punctul $P(2,-4)$? Justificaţi.

Dorel I. Duca

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011

CLASA a X-a

SUBIECTUL 1

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$2011^{2[x]} + 2011^{x} = 2012 \cdot 2011^{[x]},$$

unde prin $[x]$ se înţelege partea întreagă a numărului real x.

Gheorghe Lobonţ

SUBIECTUL 2

Fie z_1, z_2 numere complexe ce satisfac relaţiile

$$\left|z_1^5 + z_2^5\right| \le 2, \quad \left|z_1^3 + z_2^3\right| \le 2 \quad \text{şi} \quad \left|z_1 z_2\right| \le 1.$$

Să se arate că $\left|z_1 + z_2\right| \le 2.$

Aurel Doboşan, G.M. nr. 4/2010

SUBIECTUL 3

Fie $\alpha, \beta \ge 0$ şi $a, b \ge 1$ numere reale. Să se arate că

$$a^{\alpha \sin x + \beta \cos x} \cdot b^{\alpha \cos x + \beta \sin x} \le e^{(\alpha+\beta)\sqrt{\ln^2 a + \ln^2 b}},$$

oricare ar fi $x \in R$.

Ilie Diaconu, nr. 4/2010

SUBIECTUL 4

Se dă $f : N^* \to R$, $f(n) = (-1)^{[\sqrt{n}]}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x. Studiaţi periodicitatea funcţiei f.

Monica Fodor

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011

CLASA a XI-a

SUBIECTUL 1

Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$x_n = \frac{\cos^3 1}{n+1} + \frac{\cos^3 2}{n+2} + \ldots + \frac{\cos^3 n}{2n}, \qquad n \geq 1.$$

Liviu Tivadar

SUBIECTUL 2

Fie funcţia polinomială $Q(x) = (a_1(x-1)+1)(a_2(x-1)+1)\ldots(a_n(x-1)+1)$, $x \in R$,

unde $a_i \in (0,1)$, $1 \leq i \leq n$.

Determinaţi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât expresia

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} k b_k\right)^2$$

să aibă valoarea maximă, unde b_k este coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului Q.

Octavian Agratini

SUBIECTUL 3

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in N^*$.

Gheorghe Lobonţ

SUBIECTUL 4

Fie $f : D \to R$ definită prin

$f(x) = \left(\cos x - \ln(1+x) + x + \dfrac{x^3}{3}\right)^{\pi}$, oricare ar fi $x \in D$, unde $D \subseteq R$ este mulţimea maximă de definiţie a funcţiei f. Determinaţi cel mai mare număr natural n cu proprietatea că există un număr real $a \neq 0$, o vecinătate V a lui 0 şi o funcţie $b : V \to R$ astfel încât

$$f(x) = 1 + ax^n + x^n b(x), \quad x \in V, \text{ şi } \lim_{x\to 0} b(x) = 0.$$

Dorel I. Duca

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „ MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XI-a, 6– 7 MAI 2011

CLASA a XII-a

1. Să se arate că există un număr real a şi un şir (b_n) care satisfac următoarele două proprietăţi

$$a)\ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \frac{a}{n} + b_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty} nb_n = 0.$$

2. Să se determine numerele naturale p pentru care ecuaţia

$$x^3 + y^3 = (p+3)! + 4$$

are soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm

$$H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se demonstreze că H_n este subgrup al grupului $(Q, +)$ şi că

$$Q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} H_n.$$

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = x\,[x]\,|\sin \pi x|\,, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi să se determine o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcţiei f pe $\mathbb{R}$. (S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.)