INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE MUNICIPIU, 30.04.2011 -

CLASA A VI-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2+1/2 ore.

1. Numerele naturale x, y şi z verifică relațiile $x+3y+5z=200$ şi $x+4y+7z=225$. Determinați valoarea sumei $x+y+z$.

2. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ se aleg punctele M şi respectiv N astfel încât distanța de la M la dreapta BC să fie egală cu AM, iar distanța de la N la dreapta BC să fie egală cu AN. Perpendiculara în punctul A pe dreapta AB intersectează dreapta BC în punctul R, iar perpendiculara în punctul A pe dreapta AC intersectează dreapta BC în punctul S. Fie $\{I\}=MR\cap NS$.

Demonstrați că semidreapta $[AI$ este bisectoarea unghiului SAR.

3. Fie A o mulțime de 6 numere naturale nenule care au suma egală cu 26. Se ştie că probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare un element din A, acesta să fie divizibil cu 3 este egală cu $0,(3)$, iar probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare un element din A, acesta să fie divizibil cu 9 este egală cu $0,1(6)$.

a) Demonstrați că probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare un element din A, acesta să fie divizibil cu 2 este cel puțin egală cu $0,(3)$.

b) Determinați produsul elementelor lui A.

4. Profesorul de matematică împarte celor mai buni doi elevi ai săi, Marius şi Lucian, 15 cartonaşe pe care sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 15 (câte un număr pe fiecare cartonaş), astfel încât suma numerelor scrise pe cartonaşele fiecăruia să fie aceeaşi.

a) Arătați, printr-un exemplu, că profesorul poate realiza o asemenea împărțire a cartonaşelor.

b) Demonstrați că există două numere naturale diferite a şi b, astfel încât unul dintre elevi are cartonaşele cu numerele a şi $b+1$, iar celălalt are cartonaşele cu numerele $a+1$ şi b.

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE MUNICIPIU 30.04.2011 -

CLASA A VI-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1

Numerele naturale x, y şi z verifică relaţiile $x+3y+5z=200$ şi $x+4y+7z=225$.

Determinaţi valoarea sumei $x+y+z$.

Gazeta Matematică

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Scăzând prima relaţie din cea de-a doua, obţinem $y+2z=25$	**2p**
A doua relaţie devine $(x+y+z)+3\cdot(y+2z)=225$	**3p**
Obţinem $x+y+z=225-3\cdot 25=150$	**2p**

Problema 2

Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ se aleg punctele M şi respectiv N astfel încât distanţa de la M la dreapta BC să fie egală cu AM, iar distanţa de la N la dreapta BC să fie egală cu AN. Perpendiculara în punctul A pe dreapta AB intersectează dreapta BC în punctul R, iar perpendiculara în punctul A pe dreapta AC intersectează dreapta BC în punctul S. Fie $\{I\}=MR\cap NS$.

Demonstraţi că semidreapta $[AI$ este bisectoarea unghiului SAR.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Avem $d(M;RA)=d(R;RS)=MA$	**1p**
Rezultă că $[RM$ este bisectoarea unghiului ARS	**1p**
Deasemenea $d(N;SA)=d(R;SR)=NA$	**2p**
Rezultă că $[SN$ este bisectoarea unghiului ASR	**2p**
Prin urmare, I este punctul de intersecţie a bisectoarelor triunghiului ASR, deci $[AI$ este bisectoarea unghiului SAR.	**1p**

Problema 3

Fie *A* o mulțime de 6 numere naturale nenule care au suma egală cu 26. Se ştie că probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare un element din *A*, acesta să fie divizibil cu 3 este egală cu $0,(3)$, iar probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare un element din *A*, acesta să fie divizibil cu 9 este egală cu $0,1(6)$.

a) Demonstrați că probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare un element din *A*, acesta să fie divizibil cu 2 este cel puțin egală cu $0,(3)$.

b) Determinați produsul elementelor lui *A*.

Marius Perianu, Slatina

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Presupunând că toate cele 6 elemente ale lui *A* sunt numere impare, suma lor ar fi cel puțin egală cu $1+3+5+7+9+11=36$, fals. Aşadar cel puțin un element al lui *A* este par	**1p**
Cum suma este pară, rezultă că, de fapt, cel puțin două (un număr par) din cele 6 numere sunt pare	**1p**
Deci probabilitatea de a alege un element din *A* care să fie divizibil cu 2 este cel puțin egală cu $\frac{2}{6}=0,(3)$	**1p**
b) Întrucât probabilitatea de a alege un element din *A* care să fie divizibil cu 9 este $0,1(6)=\frac{1}{6}$, rezultă că unul (şi numai unul) dintre elementele lui *A* este multiplu de 9. Dacă acest element ar fi cel puțin egal cu 18, atunci suma celorlalte 5 elemente ale lui *A* ar fi cel mult 8, imposibil, deoarece suma celor mai mici 5 numere naturale nenule este 15. Ca urmare, $9\in A$	**1p**
Fie $a<b<c<d<e$ celelalte elemente ale lui *A*. Atunci $a+b+c+d+e=17$. Deoarece probabilitatea ca , extrăgând la întâmplare un element din *A*, acesta să fie divizibil cu 3 este egală cu $0,(3)=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, rezultă că mulțimea *A* mai conține un element divizibil cu 3, dar nu cu 9. Acesta din urmă nu poate fi 15 sau 12.	**1p**
Dacă ar fi 6, atunci suma celorlalte elemente ar fi 11, dar $1+2+4+5=12$, deci $3\in A$	**1p**
Dacă $b\geq 3$, obținem contradicție, deci $a=1$, $b=2, c=3$. Apoi $d=4, e=7$ Produsul elementelor este $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 9=1512$	**1p**

Problema 4

Profesorul de matematică împarte celor mai buni doi elevi ai săi, Marius şi Lucian, 15 cartonaşe pe care sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 15 (câte un număr pe fiecare cartonaş), astfel încât suma numerelor scrise pe cartonaşele fiecăruia să fie aceeaşi.

a) Arătați, printr-un exemplu, că profesorul poate realiza o asemenea împărțire a cartonaşelor.

b) Demonstrați că există două numere naturale diferite *a* şi *b*, astfel încât unul dintre elevi are cartonaşele cu numerele *a* şi $b+1$, iar celălalt are cartonaşele cu numerele $a+1$ şi *b*.

Marius Perianu, Slatina

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie *L* mulțimea numerelor înscrise pe cartonașele lui Lucian și *M* mulțimea numerelor înscrise pe cartonașele lui Marius. De exemplu $M=\{10,11,12,13,14\}$ și $L=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,15\}$	**2p**
b) Presupunem că, de exemplu, $1\in L$ și *k* este cel mai mare element din *L*. Dacă pentru oricare $a\in L, a<k$, avem $a+1\in L$, atunci $L=\{1,2,...,k\}$	**2p**
În acest caz, trebuie ca $1+2+...+k=\frac{1+2+...+15}{2}=60$, adică $k\cdot(k+1)=120$, fals	**1p**
Deci *L* nu poate fi formată din numere naturale consecutive. Rezultă că există $x\in L$ astfel încât $a=x-1\notin L$. Prin urmare $a\in M$ și $a+1\in L$	**1p**
Deasemenea, există $y\in M$ astfel încât $b=y-1\in L$, deci $b+1\in M$	**1p**