OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE MUNICIPIU, 30.04.2011 -

CLASA A V-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1

a) Arătați că numărul $n=9\cdot10^9+\ldots+2\cdot10^2+1\cdot10^1$ se divide cu suma cifrelor sale.

b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ fiecare având proprietatea că este de 13 ori mai mare decât suma cifrelor sale.

Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $n=9876543210$. Suma cifrelor *lui n* este egală cu 45.	**1p**
Finalizare	**1p**
b)Avem $100a+10b+c=13\cdot(a+b+c)$, echivalent cu $29a=b+4c\le45$	**1p**
Rezultă că $a=1$ şi $29=b+4c$	**1p**
Obținem $\overline{abc}\in\{117,156,195\}$	**3p**

Problema 2

Se consideră mulțimea $A=\left\{3^n+9^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Arătați că $2^{2011}\notin A$.

b) Demonstrați că mulțimea *A* nu conține pătrate perfecte.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Pentru $n=0$, obținem $3^0+9^0=2\in A$. Pentru $n>0$, elementele mulțimii A se divid cu 3.	**1p**
Deoarece 2^{2011} nu se divide cu 3, rezultă că $2^{2011}\notin A$	**1p**
b) Avem $3^n+9^n=3^n\cdot(1+3^n)$	**2p**
Notând $3^n=a\in\mathbb{N}^*$, obținem $a^2<a(1+a)<(1+a)^2$	**2p**
Prin urmare, numărul $3^n\cdot(1+3^n)$ nu este pătrat perfect	**1p**

Problema 3

a) Reprezentați fracția $\frac{1}{111}$ sub formă de fracție zecimală.

b) Determinați cel mai mic număr natural *n*, diferit de 0, cu proprietatea că $\frac{1}{n}=0,(\overline{abc})$, unde *a*, *b* şi *c* sunt cifre, nu toate egale.

Marius Perianu, Slatina

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Avem $\frac{1}{111}=0,(009)$	**2p**
b) Fie *n* cel mai mic număr cu proprietatea cerută. Atunci există $a,b,c\in\{0,1,...,9\}$, nu toate egale, astfel încât $\frac{1}{n}=\frac{\overline{abc}}{999}$, (atenție: *a* poate fi egal cu 0).	**2p**
Rezultă $n\cdot\overline{abc}=999$, deci *n* şi $\overline{abc}$ sunt divizori ai lui 999.	**1p**
Cum 999=3·333=9·111=27·37, rezultă că cel mai mic număr *n* este 27 şi $\frac{1}{27}=0,(037)$	**2p**

Problema 4

Se consideră mulțimea $M=\{1,2,3,...,15\}$.

a) Calculați suma elementelor mulțimii *M*.

b) Determinați submulțimile *X* ale mulțimii *M* care au simultan următoarele proprietăți:

i) Elementele mulțimii *X* sunt numere consecutive;
ii) Media aritmetică a elementelor din *X* este număr natural;
iii) Suma elementelor din *X* este egală cu 60.

Mircea Fianu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Suma elementelor mulțimii *M* este egală cu 120	**1p**
b) Fie *x* numărul de elemente al mulțimii *X* şi *m* media aritmetică a acestora. Avem $x\cdot n=60$.	**2p**
Rezultă că *x* este divizor al lui 60, adică $x\in\{1,2,3,4,5,6,10,12,15\}$	**1p**
Dacă $x\in\{1,2,3,4,12,15\}$, se contrazice iii)	**1p**
Dacă $x\in\{6,10\}$, atunci mulțimea *X* ar conține un număr impar de elemente impare, deci suma elementelor ar fi impară	**1p**
Pentru $x=5$, Obținem $X=\{10,11,12,13,14\}$	**1p**