Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011

Clasa a V-a

I. *(9p)* Determinați numerele de forma $\overline{2xy7}$ care împărțite la 18 dau restul 11.

Prof. Vasile Tarciniu, Odobești

II. *(4p)*a) Aflați pe x din egalitatea:

$1 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot x + \cdots + 2010 \cdot 2011 \cdot x = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2010^2) \cdot x + 4020 \cdot 2011$

Prof. Vasile Tarciniu, Odobești

(5p) b) Determinați cel mai mic număr natural n astfel ca suma cifrelor lui n și suma cifrelor lui $n+1$ să se dividă la 4.

Prof. Dan Nedeianu, Dr.Tr. Severin

III. *(9p)* Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ numere naturale. Să se arate că numărul $5^{a_1} + 5^{a_2} + \cdots + 5^{a_{2011}}$ nu este pătrat perfect.

prof. Gheorghe Stoica, Petroșani

IV. *(9p)* Un pătrat cu latura egală cu $n, n \geq 4$ este împărțit în n^2 pătrate cu latura 1. Un greiere poate trece din orice pătrățică a pătratului intr-o pătrățică vecină și aflată pe aceeași linie sau coloană iar o furnică poate trece într-o pătrățică vecină aflată pe diagonală cu ea.

Știind că în timp ce furnica face o mișcare, greierele face trei mișcări, să se afle valorile lui n pentru care există câte un traseu pentru greiere și furnică astfel încât plecând în același timp din pătrățica unui colț al pătratului să ajungă în același timp în pătrățica din colțul opus.

Prof. Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 2 ore și 30 minute.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011

Clasa a VI-a

I. *(4p)*a) Dacă $4a - 9b - 20c = 0$ atunci $\frac{b(a+c)}{12}$ este număr întreg.

Prof. Vasile Tarciniu, Odobești

*(5p)*b) Dacă fracția $\frac{10a}{3a-b}$; $a, b \in \mathbb{N}$ este ireductibilă atunci și fracția $\frac{3a-b}{a+3b}$ este ireductibilă.

Prof.Vasile Tarciniu, Odobești

II. *(9p)* Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a^2+b^2}{c} = \frac{b^2+c^2}{a} = \frac{c^2+a^2}{b}$ să se arate că $\frac{a^2+5b^2}{b+2c} = \frac{2(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}$

Prof. Ion Neață, Slatina

III. *(9p)*Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AC), N \in (AB)$ astfel încât $[BN] \equiv [CM]$. Să se demonstreze că dacă $(AO$ este bisectoarea unghiului BAC, unde $MB \cap CN = \{0\}$, atunci ΔABC este isoscel.

Prof. Traian Preda

IV. *(9p)* Un lănțișor este format din 2010 zale din aur și 2010 zale din argint. Să se arate că pentru orice ordine a zalelor în lănțișor, există o porțiune a sa cu 2010 zale, jumătate din aur și jumătate din argint.

Prof. Gheorghe Stoica

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 2 ore și 30 minute.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011

Clasa a VII-a

I. *(4p)* a) Să calculeze:

$2008^2 - 2009^2 - 2010^2 + 2011^2$

(5p) b) Să se arate că:

$\sqrt{(x^2+y^2)(x+y)^2+x^2y^2} \in \mathbb{Q}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

Prof. Adrian Turcu

II. *(4p)* a) Fie $a \in (0,1)$ un număr real. Să se scrie numărul "a" ca sumă a trei numere iraționale distincte situate în intervalul $(0,1)$.

(5p) b) Fie $a \in (0,\infty)$ un număr real. Să se scrie numărul a ca suma a cel puțin trei numere iraționale distincte situate în intervalul $(0,1)$.

Prof. Traian Preda

III. *(9p)* Fie trapezul dreptunghic $ABCD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^o$, $M \in (DC)$, $N \in (AB)$, $AM \perp BD$ și $DN \perp AC$.

Demonstrați că $DM = CM$ dacă și numai dacă $AN = BN$.

Prof. Ion Neață

IV. *(9p)* Se consideră triunghiul ABC și $M \in (BC)$, diferit de mijlocul lui (BC). Dacă paralelele duse prin M la laturile AC și AB ale triunghiului ABC taie pe AB în P și pe AC în Q, arătați că

$$NB + NC \geq 2 \cdot MN$$

Prof Gheorghe Stoica, Petroșani

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 3ore.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011

Clasa a VIII-a

I. Fie numărul $x = a^2b^2 + c^2d^2 + a^2c^2 + b^2d^2$ unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$.

*(4p)*a) Să se arate că x este un număr compus.

*(5p)*b) Să se scrie x ca sumă de două pătrate perfecte.

I. *(4p)*a) Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $a = n^5 + n + 1$ este număr prim.

Prof. Aurel Doboșan, Lugoj

*(5p)*b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve în mulțimea numerelor prime, ecuația: $x^n - y^2 = 1$.

Prof. Gheorghe Stoica, Petroșani

II. *(9p)* Să se arate că oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, există o infinitate de perechi de numere $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât mulțimea $\left\{\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \dots\right\} \cap \mathbb{N}$ să aibă k elemente.

Prof. Gheorghe Stoica, Petroșani

III. *(4p)* 1) Se consideră numerele reale $x, y, z \in [a, 2a]$ unde $a \in \mathbb{R}_+$. Demonstrați că:

$$6a^2 \leq 3a(x + y + z) - (xy + xz + yz) \leq 7a^2$$

(5p) 2) Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și punctele $M \in [AB], N \in [CD]$ și $P \in [EF]$.

Dacă $AB = a$, demonstrați că :

$\mathcal{A}_{\Delta MNP} \in \left[\frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}\right]$, unde $\mathcal{A}_{\Delta MNP}$ este aria triunghiului MNP.

Prof. Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 3 ore.