SIMULARE EXAMENUL DE BACALAUREAT
Probă scrisă la MATEMATICĂ M 1– Proba E. c)

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică- informatică.

- **Toate subiectele (I,II,III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p 1.Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $3 \cdot \overline{z} + 2 \cdot z = 5 - 2i$. Să se calculeze modulul numărului complex z.

5p 2. Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$. Să se calculeze

$$(f \circ f)(-\frac{1}{10}) + (f \circ f)(-\frac{1}{9}) + \ldots + (f \circ f)(-1) + (f \circ f)(1) + \ldots + (f \circ f)(\frac{1}{9}) + (f \circ f)(\frac{1}{10}).$$

5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-1} = 2$.

5p 4. Mulțimea A are 1023 de submulțimi nevide. Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p 5. Se consideră punctele $A(3,5)$, $B(5,6)$, $C(2,m^2), m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$.

5p 6. Fie ABC un triunghi care are $AC = 6$ şi $\cos B = \frac{4}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5p a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A - x \cdot I_3) = 0$.

5p b) Să se arate că dacă matricea $X \in M_3(\mathbb{C})$ verifică relația $A \cdot X = X \cdot A$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

5p c) Să se determine numărul de soluții ale ecuației $X^3 = A$, $X \in M_3(\mathbb{C})$.

2. Fie polinomul $f = 3 \cdot X^3 - m \cdot X^2 + m \cdot X - 3$, $m \in \mathbb{R}$, care are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p a) Să se calculeze $f(1)$.

5p b) Să se determine valorile întregi ale lui m pentru care polinomul are o singură rădăcină reală.

5p Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2 \cdot e^x + 3}{5 \cdot e^x + 2}$.

5p a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

5p c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$.

5p 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin x + a^2 x, & x \le 0 \\ x \cdot \ln(x^2 + 1), & x > 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = -\pi$ şi $x = 0$, să fie egală cu $3 + 2\pi^2$.

5p c) Să se calculeze limita şirului $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $I_n = \int_0^1 f\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
BAREM DE EVALUARE MATEMATICĂ M 1

♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

	Subiectul I (30p)	
1.	$z = a + ib,\ a,b \in \mathbb{R}$.	**1p**
	$3\cdot(a-ib)+2\cdot(a+ib)=5-2i \Rightarrow 5\cdot a - ib = 5-2i \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow z = 1+2i$	**2p**
	$\lvert z\rvert = \sqrt{5}$	**2p**
2.	Se demonstrează că $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{2}{x}) = x, \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^*$.	**3p**
	Atunci suma din cerință este 0.	**2p**
3.	Condiții $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ 5-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[1,\infty) \\ x\in(-\infty,5] \end{cases} \Rightarrow x\in[1,5]$;	**2p**
	Se ridică ambii membri la puterea a doua $\Rightarrow 2\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{5-x}=0 \Rightarrow$	**2p**
	$x=1; x=5$ soluții.	**1p**
4.	Numărul tuturor submulțimilor nevide ale unei mulțimi cu n elemente este $2^n - 1$;	**3p**
	$2^n - 1 = 1023 \Rightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow 2^n = 2^{10} \Rightarrow n = 10$.	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}+\vec{j};\ \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + (m^2-5)\cdot\vec{j}$;	**2p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2 \Leftrightarrow -2+(m^2-5)=2 \Leftrightarrow m^2=9 \Leftrightarrow m=\pm 3$.	**3p**
6.	$\sin B = \frac{3}{5}$;	**2p**
	$\frac{b}{\sin B} = 2\cdot R \Rightarrow R = 5$.	**3p**
	Subiectul II (30p)	
1.	a)	**1p**
	$A - x\cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix}$;	
	$\det(A - xI_3) = (1-x)(2-x)(3-x)$;	**2p**
	$\det(A - xI_3) = 0 \Rightarrow x=1$ sau $x=2$ sau x=3.	**2p**
	b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & e & f \\ g & b & h \\ d & m & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.	**1p**
	Din condiția $A\cdot X = X\cdot A \Rightarrow e=f=g=h=m=d=0 \Rightarrow$	**3p**
	$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. a,b,c $\in \mathbb{C}$.	**1p**

	c) 27 soluții	**5p**
2.	a) $f(1)=0, \forall m \in \mathbb{R}$	**5p**
	b)Din $f(1)=0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow x=1$ rădăcina polinomului f, $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $f=(x-1)\cdot\left(3x^2+(3-m)\cdot x+3\right)$; Polinomul f are numai o rădăcină reală dacă ecuația $3x^2+(3-m)\cdot x+3=0$ are $x_2, x_3 \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$. Aşadar, $\Delta<0$ $\Delta<0 \Rightarrow (3-m)^2-36<0 \Rightarrow \lvert m-3\rvert<6 \Rightarrow m \in (-3,9)$; $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-3,9) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2,-1,0,...,6,7,8\}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
	.Din $f(1)=0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1=1$ rădăcina polinomului f $\Rightarrow \lvert x_2\rvert+\lvert x_3\rvert=2$; $\begin{cases} x_1x_2x_3=1 \\ x_1=1 \end{cases} \Rightarrow \lvert x_2\rvert\cdot\lvert x_3\rvert=1$; $\begin{cases} \lvert x_2\rvert+\lvert x_3\rvert=2 \\ \lvert x_2\rvert\cdot\lvert x_3\rvert=1 \end{cases} \Rightarrow \lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$ daca $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci $x_2=x_3=1$ sau $x_2=x_3=-1$; $x_2=x_3=1 \Rightarrow m=9$; $x_2=x_3=-1 \Rightarrow m=-3$; daca $x_2, x_3 \in \mathbb{C}-\mathbb{R} \Rightarrow m \in (-3,9)$ Aşadar $m \in [-3,9]$	**2p** **1p** **1p** **1p**
	Subiectul III (30p)	
1.	a) $y=\frac{3}{2}$ asimptota la graficul funcției f către $-\infty$; $y=\frac{2}{5}$ asimptota la graficul funcției f către ∞.	**2p** **3p**
	b) $f'(x)=\frac{-11\cdot e^x}{\left(5e^x+2\right)^2}$; $f''(x)=\frac{11\cdot e^x\cdot\left(5e^x-2\right)}{\left(5e^x+2\right)^3}$; $x=\ln\frac{2}{5}$ punct de inflexiune	**2p** **2p** **1p**
	c) $m \in \mathbb{R}-\left(\frac{2}{5},\frac{3}{2}\right)$ ecuația nu are soluții reale; $m \in \left(\frac{2}{5},\frac{3}{2}\right)$ ecuația are o soluție reală.	**3p** **2p**
2.	a) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x)=x\cdot\ln\left(1+x^2\right)$, $\forall x>0$. Se demonstrează că $f(x)>0, \forall x \in (0,\infty)$; Se obține $F'(x)>0, \forall x \in (0,\infty) \Rightarrow$ F este strict cresctoare pe$(0,\infty)$.	**2p** **2p** **1p**

b)Determinarea ariei	**3p**
$a = \pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi^2}+4}$	**2p**
c)Se aplică inegalitatea $\ln(1+x) \le x,\ \forall x \ge 0$;	**2p**
$0 \le I_n = \int_0^1 f\left(\dfrac{\sqrt{x}}{n}\right)dx = \int_0^1 \dfrac{\sqrt{x}}{n}\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)dx \le \int_0^1 \dfrac{\sqrt{x}}{n}\cdot\dfrac{x}{n^2}dx =$ $\dfrac{1}{n^3}\cdot\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\Big\vert_0^1 = \dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{2}{5}.$	**2p**
$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0.$	**1p**