INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEŢEANĂ 02.04.2011

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Determinaţi tripletele (x, y, z) de numere naturale, ştiind că $\frac{x-10^2}{10^3}=\frac{234}{yz+y}=\frac{y}{10}$.

SUBIECTUL 2

a) Arătaţi că există numere naturale care se termină cu 984 şi sunt divizibile cu 948.
b) Există numere naturale care se termină cu 948 şi sunt divizibile cu 984 ?

SUBIECTUL 3

În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB, BOC, COD, DOA, astfel încât

$6\cdot m(\sphericalangle BOC)=7\cdot m(\sphericalangle AOB)$, $7\cdot m(\sphericalangle COD)=10\cdot m(\sphericalangle AOD)$ şi unghiul format de bisectoarele unghiurilor AOB şi COD este alungit.

a) Demonstraţi că unghiurile BOC şi AOD sunt congruente.
b) Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC şi BOD.

SUBIECTUL 4

a) Demonstrați că într-un triunghi isoscel unghiurile de la bază sunt congruente.
b) Se dă triunghiul isoscel ABC, AB=AC, $m(\hat{A})>90^0$. Se notează cu M punctul de intersecţie dintre perpendiculara în A pe AC şi perpendiculara în B pe BC, iar cu N punctul de intersecţie dintre perpendiculara în A pe AB şi perpendiculara în C pe BC. Dacă $\{P\}=BN\cap CM$, demonstraţi că [AP este bisectoarea unghiului BAC.

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu și Ion Sorin

CLASA a VI-a SOLUŢII

SUBIECTUL 1

Determinaţi tripletele (x, y, z) de numere naturale, ştiind că $\dfrac{x-10^2}{10^3}=\dfrac{234}{yz+y}=\dfrac{y}{10}$.

Soluţie:

Din egalitatea ultimelor două rapoarte se obţine $y^2(z+1)=2340$...............................**1p**

Cum $2340=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$ şi y^2 este un pătrat perfect care divide pe 2340, rezultă $y\in\{1, 2, 3, 6\}$..**2p**

Pentru y = 1 $\dfrac{234}{z+1}=\dfrac{1}{10}$, rezultă z = 2339 şi din egalitatea cu primul raport x = 200... **1p**

Pentru y = 2 $\dfrac{234}{z+1}=\dfrac{4}{10}$, rezultă z = 584 şi cu primul raport x = 300. ....**1p**

Pentru y = 3 $\dfrac{234}{z+1}=\dfrac{9}{10}$, rezultă z = 259 şi cu primul raport x = 400. ....**1p**

Pentru y = 6 $\dfrac{234}{z+1}=\dfrac{36}{10}$, rezultă z = 64 şi cu primul raport x = 700. ....**1p**

$(x, y, z)\in\{(200, 1, 2339), (300, 2, 584), (400, 3, 259), (700, 6, 64)\}$.

SUBIECTUL 2

a) Arătaţi că există numere naturale care se termină cu 984 şi sunt divizibile cu 948.
b) Există numere naturale care se termină cu 948 şi sunt divizibile cu 984 ?

Soluţie:

a) Fie $\overline{a_1a_2a_3...a_n984}=\overline{a984}$, unde a = $\overline{a_1a_2a_3...a_n}$ **1p**

Avem 1000a + 984 = 948k, care se mai poate scrie 948a + 52a + 948 + 36 = 948k, de aici se deduce 52a + 36 = 948p sau 13a + 9 = 237p, ecuaţie care are o soluţie pentru p = 3 şi a = 54...**2p**

Şi atunci $54984=948\cdot 58$, constituie un exemplu de număr natural care se termină cu 984 şi este divizibil cu 948..**1p**

b) Numărul 984 este divizibil cu 8,...**1p**

iar numerele naturale care se termină cu 948 nu sunt divizibile cu 8 ....**1p**

şi atunci nu există numere naturale care se termină cu 948 şi sunt divizibile cu 984...**1p**

SUBIECTUL 3

În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB, BOC, COD, DOA, astfel încât

$6\cdot m(\sphericalangle BOC)=7\cdot m(\sphericalangle AOB)$, $7\cdot m(\sphericalangle COD)=10\cdot m(\sphericalangle AOD)$ şi unghiul format de bisectoarele unghiurilor AOB şi COD este alungit.

a) Demonstraţi că unghiurile BOC şi AOD sunt congruente.

b) Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC şi BOD.

Soluţie:

a) $m(\sphericalangle BOC)=180^0 - m(\sphericalangle BOE) - m(\sphericalangle COF)$ **1p**

$m(\sphericalangle AOD)= 180^0 - m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle DOF)$...............................**1p**

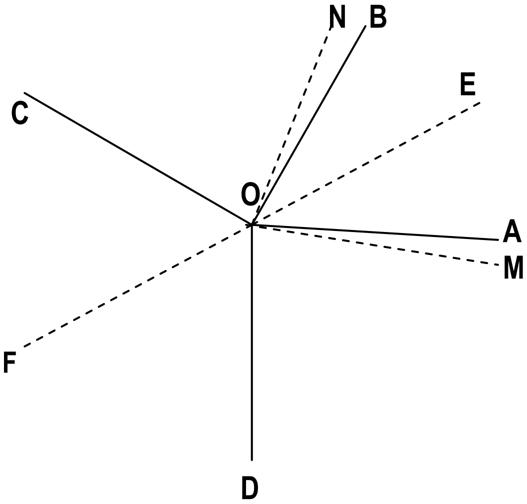
$m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle AOE)$ şi $m(\sphericalangle COF) = m(\sphericalangle DOF)$......................**1p**

b) Dacă se notează $m(\sphericalangle AOB)=6x$, $m(\sphericalangle BOC)=m(\sphericalangle AOD)=7x$ şi $m(\sphericalangle COD)=10x$...**1p**

avem ecuaţia $6x + 7x + 7x + 10x = 360^0$, de unde $x = 12^0$............**1p**

$m(\sphericalangle AOB)=72^0$, $m(\sphericalangle BOC)=m(\sphericalangle AOD)=84^0$ şi $m(\sphericalangle COD)=120^0$.....**1p**

$m(\sphericalangle MON)=m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOC) = 84^0$................**1p**



SUBIECTUL 4

a) Demonstrați că într-un triunghi isoscel unghiurile de la bază sunt congruente.

b) Se dă triunghiul isoscel ABC, AB=AC, $m(\hat{A})>90^0$. Se notează cu M punctul de intersecţie dintre perpendiculara în A pe AC şi perpendiculara în B pe BC, iar cu N punctul de intersecţie dintre perpendiculara în A pe AB şi perpendiculara în C pe BC. Dacă $\{P\}=BN \cap CM$, demonstraţi că [AP este bisectoarea unghiului BAC.

Soluţie:

a) Demonstrație...**2p**

b) $\Delta ABM\equiv\Delta ACN$(ULU), rezultă AM=AN (1)....................**1p**

$\Delta ACM\equiv\Delta ABN$(LUL), rezultă $\sphericalangle AMC\equiv\sphericalangle ANB$ (2).......................**1p**

Din (1) rezultă $\sphericalangle AMN\equiv\sphericalangle ANM$ şi cu (2) se deduce $\sphericalangle PMN\equiv\sphericalangle PNM$, de unde PM=PN (3)..**1p**

Din (1), (2), (3), rezultă $\Delta AMP\equiv\Delta ANP$(LUL) şi atunci $\sphericalangle MAP\equiv\sphericalangle NAP$, cum $\sphericalangle BAM\equiv\sphericalangle CAN$ se obţine $\sphericalangle BAP\equiv\sphericalangle CAP$ şi deci [AP este bisectoarea unghiului BAC.....................................**2p**