INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEŢEANĂ 02.04.2011

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $8(3^n + 3^{n+2} + 3^{n+4}) = 3^n(3^6 - 1)$.
b) Fie numărul $A = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \ldots + 3^{2011}$. Stabiliţi dacă numărul $24 \cdot A + 9$ este pătrat perfect.

SUBIECTUL 2

a) Arătaţi că $n^2 - 2011n$ este număr natural par, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2011$.
b) Determinaţi numerele naturale x şi y, ştiind că $2^x + 3(y + 1101) = y^2$.

SUBIECTUL 3

a) Arătaţi că numărul $m = \overline{abc0abc0} + \overline{abc}$ este divizibil cu 37, pentru orice număr $\overline{abc}$.
b) Ştiind că numărul $\overline{abc}$ este divizibil cu 37, arătaţi că $n = 3 \cdot \overline{bca} + 7 \cdot \overline{cab}$ este divizibil cu 37.

SUBIECTUL 4

Determinaţi câtul şi restul împărţirii numerelor: a) 3^{103} la $4 \cdot 3^{100}$;
b) $4 \cdot 3^{103} + 4$ la $3^{100} - 1$.

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu și Ion Sorin

CLASA a V-a SOLUŢII

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $8(3^n + 3^{n+2} + 3^{n+4}) = 3^n(3^6 - 1)$.

b) Fie numărul $A = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \ldots + 3^{2011}$. Stabiliţi dacă numărul $24 \cdot A + 9$ este pătrat perfect.

Soluţie:

a) $8(3^n + 3^{n+2} + 3^{n+4}) = 8 \cdot 3^n(1 + 3^2 + 3^4) = 8 \cdot 3^n \cdot 91 = 3^n \cdot 728 = 3^n(729 - 1) = 3^n(3^6 - 1)$....**3p**

b) $24 \cdot A + 9 = 24 \cdot 3 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \ldots + 3^{2010}) + 9 = 8 \cdot 9 \cdot (1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^{1005}) + 9 =$
$8 \cdot 9 + 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^3 \ldots + 8 \cdot 9^{1006} + 9 = (9 - 1) \cdot 9 + (9 - 1) \cdot 9^2 + (9 - 1) \cdot 9^3 + \ldots + (9 - 1) \cdot 9^{1006} + 9$
$= 9^2 - 9 + 9^3 - 9^2 + 9^4 - 9^3 + \ldots + 9^{1007} - 9^{1006} + 9 = 9^{1007} = (3^{1007})^2$, pătrat perfect. **4p**

SUBIECTUL 2

a) Arătaţi că $n^2 - 2011n$ este număr natural par, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2011$.

b) Determinaţi numerele naturale x şi y, ştiind că $2^x + 3(y + 1101) = y^2$.

Soluţie:

a) $n^2 - 2011n = n(n - 2011)$. **1p**
Dacă n este număr natural par, $n \geq 2011$, atunci produsul $n(n - 2011)$ este număr natural par.
Dacă n este număr natural impar, $n \geq 2011$, factorul $n - 2011$ este par şi atunci produsul
$n(n - 2011)$ este număr natural par...**2p**

b) $y^2 - 3y = 3303 + 2^x \Leftrightarrow y(y - 3) = 3303 + 2^x$...**1p**
Avem $y > 3$ şi cum produsul $y(y - 3)$ este număr par, iar 3303 fiind impar, rezultă 2^x este impar şi de aici $x = 0$..**2p**
Înlocuind $x = 0$ se obţine $y(y - 3) = 3304$, de unde $y \mid 3304$ şi $y - 3 \mid 3304$, rezultă $y = 59$.....**1p**.
Numerele sunt: $x = 0$ şi $y = 59$.

SUBIECTUL 3

a) Arătaţi că numărul $m = \overline{abc0abc0} + \overline{abc}$ este divizibil cu 37, pentru orice număr $\overline{abc}$.

b) Ştiind că numărul $\overline{abc}$ este divizibil cu 37, arătaţi că $n = 3 \cdot \overline{bca} + 7 \cdot \overline{cab}$ este divizibil cu 37.

Soluţie:

a) $m = \overline{abc} \cdot \mathbf{100000} + \overline{abc} \cdot \mathbf{10} + \overline{abc} = \mathbf{100011} \cdot \overline{abc} = \mathbf{37 \cdot 2703} \cdot \overline{abc} \vdots 37$.................**3p**

b) $n = 300b + 30c + 3a + 700c + 70a + 7b = 73a + 307b + 730c$..**1p**

Calculând $10 \cdot \overline{abc} + n = 1000a + 100b + 10c + 73a + 307b + 730c = 1073a + 407b + 740c =$
$37(29a + 11b + 20c) = \mathcal{M}_{37}$..**2p**

Din $10 \cdot \overline{abc} + n = \mathcal{M}_{37}$ şi $\overline{abc} \vdots 37$, rezultă $n \vdots 37$...**1p**

SUBIECTUL 4

Determinaţi câtul şi restul împărţirii numerelor: a) 3^{103} la $4 \cdot 3^{100}$;
b) $4 \cdot 3^{103} + 4$ la $3^{100} - 1$.

Soluţie:

a) $3^{103} = 27 \cdot 3^{100} = (24 + 3) \cdot 3^{100} = 24 \cdot 3^{100} + 3^{101} = (4 \cdot 3^{100}) \cdot 6 + 3^{101}$...**2p**
Cum $3^{101} < 4 \cdot 3^{100}$, rezultă câtul este 6 şi restul este 3^{101}..**1p**

b) $4 \cdot 3^{103} + 4 = 108 \cdot 3^{100} + 4 = 108 \cdot 3^{100} + 112 - 108 = (3^{100} - 1) \cdot 108 + 112$. **2p**
Cum $112 < 3^{100} - 1$, rezultă câtul este 108 şi restul este 112..**2p**