Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar Judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a VIII-a

1. Fie a, b, c trei numere reale mai mari sau egale decât -2, având suma nulă. Arătaţi că $a^3 + b^3 + c^3 \geq -6$.

2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu M şi N centrele feţelor $A'B'C'D'$ şi $ADD'A'$. Arătaţi că dacă $AM \perp A'C$ şi $C'N \perp BD'$, atunci paralelipipedul este cub.

3. Arătaţi că un pentagon convex cu toate unghiurile egale şi trei dintre laturi congruente este regulat.

4. a) Fie $OABC$ un tetraedru tridreptunghic ($OA \perp OB \perp OC \perp OA$). Se notează $OA = p, OB = q, OC = r$ şi cu d distanţa de la punctul O la planul (ABC). Arătaţi că are loc egalitatea:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}.$$

b) Fie $a, b, c > 0$. Să se determine o soluţie a ecuaţiei

$$\sqrt{(b+c)(b-x)(c-x)} + \sqrt{(c+a)(c-x)(a-x)} + \sqrt{(a+b)(a-x)(b-x)} = \sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Notă. Timp de lucru - 3 ore.

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Caraş-Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Clasa a VIII-a - Barem orientativ de corectare

Problema 1. Start ... 1p
Scrie $(a-1)^2(a+2) \geq 0$ ... 3p
Obţine $a^3 - 3a + 2 \geq 0$ ... 3p
Scrie inegalităţile analoage pentru b şi c, apoi însumează şi obţine concluzia ... 3p

Problema 2. Start ... 1p
(Observă că punctele A, M, A', C, respectiv C', N, B, D' sunt coplanare ... 2p)
Scrie de două ori, în mod corespunzător, condiţia de patrulater ortodiagonal ... 2p (4p)
Face calculele şi obţine două egalităţi între lungimile muchiilor paralelipipedului, mai exact $x^2 + y^2 = 2z^2$ si $y^2 + z^2 = 2x^2$, unde $AB = x, BC = y, AA' = z$ ... 4p
Deduce din aceste egalităţi că paralelipipedul este cub ... 1p

Problema 3. Start ... 1p
Precizează că distingem două cazuri: cele trei laturi congruente sunt consecutive sau nu ... 1p
În primul caz ($AB = BC = CD$) deduce mai întâi că $DE = AE$ ... 2p
Deduce apoi că $AB = AE$ şi trage concluzia că $ABCDE$ este pentagon regulat ... 3p
Tratează complet (în acelaşi mod) cazul al doilea ... 3p

Problema 4. Start ... 1p
a) Fie H proiectia lui O pe (ABC) si D proiectia lui O pe BC. Calculeaza pe d ca inaltime in triunghiul dreptunghic OAD si obtine egalitatea din enunt ... 3p
b) Alege un triedru de muchii $OA = \sqrt{a}, OB = \sqrt{b}, OC = \sqrt{c}$ ... 1p
Obtine $AH = \sqrt{a - d^2}$ si analoagele; obtine $BC = \sqrt{b+c}$ si analoagele ... 1p
Obtine $BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA + AH \cdot BH \cdot AB =$
$\sqrt{(b+c)(b-d^2)(c-d^2)} + \sqrt{(c+a)(c-d^2)(a-d^2)} + \sqrt{(a+b)(a-d^2)(b-d^2)}$ ... 1p
Arata ca $BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA + AH \cdot BH \cdot AB = BC \cdot CA \cdot AB = \sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}$ ... 2p
Folosind punctul a) obtine pentru ecuatie solutia $x = \frac{abc}{bc+ca+ab}$ ... 1p