Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a VII-a

1. Arătaţi că numărul $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}$ este iraţional.

2. Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi ascuţitunghic, I centrul cercului său înscris, iar $R \in (BC)$ un punct cu proprietatea că $\widehat{ARB} \equiv \widehat{IRC}$. Arătaţi că

$$AR \cdot BC = IR \cdot (AB + AC + BC)\,.$$

3. a) Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^2 = 2011$ nu admite soluţii în mulţimea numerelor întregi.
b) Care dintre ecuaţiile $x^2 + 2011^2 = y^2$ şi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011}$ are mai multe soluţii în mulţimea numerelor întregi? Justificaţi.

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, iar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puncte în plan, necoliniare câte trei. Unele dintre puncte sunt unite prin segmente. Notăm cu s_i numărul de segmente având un capăt în punctul A_i. Arătaţi că există două puncte A_i şi A_j, astfel încât $s_i = s_j$.

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Concursul interjudeţean de matematică
"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a VII-a

1.

start	$1\,p$
notează $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}=r$ şi presupune $r\in\mathbb{Q}$	$1\,p$
scrie $r-\sqrt{2011}=\sqrt{26}+\sqrt{3}$	$2\,p$
ridică la pătrat şi obţine că $r\sqrt{2011}+\sqrt{78}=\frac{r^2+1982}{2}\in\mathbb{Q}$	$3\,p$
ridică la pătrat şi obţine că $2r\sqrt{78\cdot 2011}\in\mathbb{Q}$	$1\,p$
deduce că $\sqrt{26\cdot 3\cdot 2011}\in\mathbb{Q}$, contradicţie	$1\,p$
obţine că $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}\notin\mathbb{Q}$	$1\,p$
Total	**10 p**

2.

start	$1\,p$
duce $AA_1\perp BC$, $II_1\perp BC$, cu $A_1,I_1\in(BC)$	$1\,p$
arată că $\Delta\,AA_1R\sim\Delta\,II_1R$	$1\,p$
deduce că $\frac{AR}{IR}=\frac{AA_1}{II_1}\quad(1)$	$1\,p$
folosind $AA_1\parallel II_1$ deduce că $\Delta\,AA_1P\sim\Delta\,II_1P$, unde $P\in(BC)\cap AI$	$1\,p$
obţine că $\frac{AA_1}{II_1}=\frac{AP}{IP}\quad(2)$	$1\,p$
cu teorema bisectoarei în $\Delta\,ABC$ obţine $\frac{AB}{BP}=\frac{AB+AC}{BC}\quad(3)$	$1\,p$
cu teorema bisectoarei în $\Delta\,ABP$ obţine $\frac{AP}{IP}=\frac{AB+BP}{BP}\quad(4)$	$1\,p$
din $(1)-(4)$ obţine concluzia	$2\,p$
Total	**10 p**

3.

start	$1\,p$
a) arată că $a^2\in 4\mathbb{Z}\cup 4\mathbb{Z}+1$, $(\forall)a\in\mathbb{Z}$	$1\,p$
deduce că $x^2+y^2\in\mathbb{Z}\setminus(4\mathbb{Z}+3)$	$1\,p$
arată că $2011\in 4\mathbb{Z}+3$ şi trage concluzia	$1\,p$
b) pentru ecuaţia $x^2+2011^2=y^2$ observă că	
$(x,y)-$soluţie $\Longrightarrow(\pm x,\pm y)-$soluţii	$0,5\,p$
pentru $(x,y)\in\mathbb{N}$ transcrie $(y-x)(y+x)=2011^2$	$0,5\,p$
obţine că $(y-x,y+x)\in\{(1,2011^2),(2011,2011)\}$	$0,5\,p$
deduce că $(x,y)\in\left\{\left(\pm\frac{2011^2-1}{2},\pm\frac{2011^2+1}{2}\right),(0,\pm 2011)\right\}$	$1\,p$
pentru $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}$ transcrie echivalent	
$xy=2011(x+y),\ x,y\neq 0\Longleftrightarrow(x-2011)(y-2011)=2011^2$	$1\,p$
obţine că $(x-2011,y-2011)\in\{\pm(1,2011^2),\pm(2011^2,1),(2011,2011)\}$	$0,5\,p$
deduce că $(x,y)\in\{(2012,2011\cdot 2012),(2010,-2010\cdot 2011),$	
$(2011\cdot 2012,2012),(-2010\cdot 2011,2010),(4022,4022)\}$	$1\,p$
trage concluzia: prima ecuaţie are 6 soluţii >5 soluţii pentru a doua ecuaţie	$1\,p$
Total	**10 p**

4.

start	$1\,p$
observă că $s_i\in\{0,1,\ldots,n-1\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$1\,p$
<u>caz 1</u> $(\exists)i_0:s_{i_0}=0\Longrightarrow s_i\in\{0,1,\ldots,n-2\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$3\,p$
aplică principiul lui Dirichlet şi trage concluzia	$1\,p$
<u>caz 2</u> $s_i\neq 0,\ (\forall)i=\overline{1,n}\Longrightarrow s_i\in\{1,2\ldots,n-1\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$3\,p$
aplică principiul lui Dirichlet şi trage concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**