Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,

Reşiţa, 25-27 martie 2011

Clasa a VI-a

1. Arătaţi că nu există nici un număr natural care să se mărească de 2, 5, 6 sau 8 ori prin mutarea primei cifre la sfârşitul numărului.

2. **a)** Determinaţi numerele strict pozitive a şi b astfel încât
$$a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2},$$
pentru un număr natural $n \geq 2$ fixat.

   b) Dacă a, b şi c sunt numere naturale avându-l pe 1 drept cel mai mare divizor comun şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, arătaţi că $a + b$, $a - c$ şi $b - c$ sunt pătrate perfecte.

3. Fie $\widehat{POQ}$ un unghi ascuţit şi $B \in (OQ$. Construim din B o perpendiculară pe OP care intersectează această dreaptă în A. Punctul C este ales astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral, iar O şi C să nu fie de aceeaşi parte a dreptei AB. Fie D simetricul lui C faţă de OP şi $M \in (OQ$ astfel încât $[OC] \equiv [OM]$. Ştiind că $m(\widehat{POC}) = \frac{1}{3} m(\widehat{POQ})$,

   a) arătaţi că $[AD] \equiv [CM]$;

   b) calculaţi $m(\widehat{POQ})$.

4. Un gardian deschide pe rând toate celulele unei închisori, care sunt aşezate în linie dreaptă. Apoi, el închide celulele cu numarul 2, 4, 6 ş. a. m. d. După aceea, luând celulele din 3 în 3, răsuceşte cheia în broasca acestor celule, închizându-le pe cele deschise şi deschizându-le pe cele închise. El continuă în acest fel, la pasul i luând celulele i, $2i$, $3i$, ..., şi răsucind cheia în broasca lor. Deţinutii ale căror celule au rămas deschise după efectuarea tuturor operaţiilor posibile de acest fel sunt puşi în libertate.

   Să se arate că deţinuţii eliberaţi vor fi cei din celulele având numărul de ordine un pătrat perfect. (Fiecare operaţie începe din dreptul primei celule.)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 3 ore.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică

”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Barem de corectare pentru clasa a VI-a

Subiectul 1.

- Oficiu 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 5, deci nu există astfel de numere 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 6, deci nu există astfel de numere 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 8, deci nu există astfel de numere 1p
- În cazul numărului care se dublează, prima cifră este 2 sau 4 ...... 1p
- Dacă prima cifră este 2, atunci $\overline{2xy\ldots zt}\cdot 2=\overline{xy\ldots zt2}$ şi t este 1 sau 6 .... 1p
- Dacă $t=1$, atunci $\overline{2xy\ldots z1}$ este impar, iar $\overline{xy\ldots z12}$ este multiplu de 4, contradicţie 0,75p
- Dacă $t=6$, atunci $\overline{2xy\ldots z6}\cdot 2=M_4$, iar $\overline{xy\ldots 62}\neq M_4$, contradicţie 0,75p
- Dacă prima cifră este 4, atunci $\overline{4xy\ldots zt}\cdot 2=\overline{xy\ldots zt4}$, deci t este 2 sau 7 .... 1p

- Dacă $t = 2$, $\overline{4xy\ldots z2} \cdot 2 = \overline{xy\ldots z24}$ şi z este 1 sau 6. În primul caz, $\overline{4xy\ldots 12} \cdot 2 = M_8$ şi $\overline{xy\ldots 124} \neq M_8$. În al doilea caz, $\overline{4xy\ldots 62} \cdot 2 \neq M_8$ şi $\overline{xy\ldots 624} = M_8$ 0,75p

- Dacă $t = 7$, $\overline{4xy\ldots z7} \cdot 2 = \overline{xy\ldots z74}$ şi z este 3 sau 8. Arată că în ambele cazuri nu există astfel de numere 0,75p

Subiectul 2.

- Oficiu 1p

- a) Observă că $a^{n+2} + b^{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n)$ ... 1p

- Notează $x = a^n + b^n$ şi observă că $x = (a+b)x - abx$, deci $(a-1)(b-1) = 0$ 1p

- Dacă $a = 1$, atunci $b = 1$ şi invers 1p

- b) Arată că a, b, c - distincte 1p

- Presupune $a > b > c \Rightarrow \dfrac{3}{a} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{3}{c} \Rightarrow c < 3$ 1p

- $c = 1$ nu convine 0,5p

- Pentru $c = 2$ rezultă $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$. Atunci $\dfrac{2}{a} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < \dfrac{2}{b}$, de unde $b = 3$, deci $a = 6$ 2,5p

- Soluţia $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$ verifică condiţia problemei 1p

Subiectul 3.

- Oficiu 1p

- Figura 1p

- a) ΔADC este echilateral, $\Delta ADC \equiv \Delta ABC$ şi $[AD] \equiv [DC] \equiv [AC] \equiv [AB] \equiv [CB]$ (1) 1p

- ΔDOC este isoscel şi $m(\widehat{DOC}) = 2x$, unde $x = m(\widehat{POC})$ 1p

- $\Delta DOC \equiv \Delta MOC$, deci $[DC] \equiv [CM]$ (2) 1p

- Din (1), (2) rezultă că $[AD] \equiv [CM]$ 0,5p
- b) $[CB] \equiv [CM]$, deci $m(\widehat{CBM}) = m(\widehat{CMB})$ (3) 1p
- $m(\widehat{CMB}) = m(\widehat{OCM}) = \frac{180^\circ - 2x}{2} = 90^\circ - x$ (4) 1p
- $\widehat{CBM}$ este exterior ΔOBC, deci $m(\widehat{CBM}) = 30^\circ + 3x$ (5) 1,5p
- Din (3), (4) şi (5) rezultă că $x = 15^\circ$, deci $m(\widehat{POQ}) = 45^\circ$ 1p

Subiectul 4.

- Oficiu 1p
- Celula q a fost închisă şi deschisă în total de m ori, unde m este numărul divizorilor lui q 3p
- Celula q rămâne deschisă dacă m este un număr impar 2p
- Un număr are numărul divizorilor impar dacă şi numai dacă este pătrat perfect 3p
- Finalizare 1p