Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

CLASA a VII-a

Problema 1. Într-un pătrat de latură 60 se consideră 121 de puncte distincte. Arătaţi că, printre acestea, există trei puncte cu proprietatea că aria triunghiului determinat de ele este cel mult egală cu 30.

Problema 2. Trapezul isoscel $ABCD$ are diagonalele perpendiculare. Paralela la baze dusă prin punctul de intersecţie a diagonalelor intersectează laturile neparalele $[BC]$ şi $[AD]$ în punctele P respectiv R. Punctul Q este simetricul punctului P faţă de mijlocul segmentului $[BC]$. Demonstraţi că

a) $QR = AD$;

b) $QR \perp AD$.

Problema 3. a) Arătaţi că restul împărţirii unui pătrat perfect la 3 este egal cu 0 sau cu 1.

b) Un număr natural N este scris în baza zece numai cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sau 7. Notăm cu a_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ numărul de apariţii ale cifrei i în scrierea numărului N. Ştiind că $a_i = 4i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, arătaţi că numărul N nu este pătrat perfect.

Problema 4. Determinaţi suma elementelor mulţimii

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n}{2} + \frac{m}{5}, m, n \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}\}.$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011
CLASA a VII-a
SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Problema 1. Într-un pătrat de latură 60 se află 121 de puncte distincte. Arătaţi că printre acestea există trei puncte cu proprietatea că aria triunghiului determinat de ele este cel mult egală cu 30.

Soluţie. Cum $60 = 5 \cdot 12$, împărţim pătratul în 60 de dreptunghiuri cu laturie de 5 respectiv 12 (toate laturile mari ale dreptunghiurilor paralele între ele). ....2 puncte

Aria fiecărui dreptunghi este egală cu 60.......................1 punct

Conform principiului Dirichlet, trei dintre puncte se vor afla în acelaşi dreptunghi ....2 puncte

ceea ce înseamnă că aria triunghiului determinat de acestea nu va depăşi jumatate din aria dreptunghiului. .... 2 puncte

Problema 2. Trapezul isoscel $ABCD$ are diagonalele perpendiculare. Paralela la baze dusă prin punctul de intersecţie a diagonalelor intersectează laturile neparalele $[BC]$ şi $[AD]$ în punctele P, respectiv R. Punctul Q este simetricul punctului P faţă de mijlocul segmentului $[BC]$. Demonstraţi că

a) $QR = AD$;

b) $QR \perp AD$.

Soluţie. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi M mijlocul segmentului $[BC]$.

a) $[OM]$ este linie mijlocie în triunghiul PQR, deci $MO||RQ$ şi $OM = \frac{RQ}{2}$ ....2 puncte

$[OM]$ este mediană în triunghiul dreptunghic BOC, deci $OM = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$; rezultă $RQ = AD$ ....2 puncte

b) Dacă $\{T\} = MO \cap AD$, atunci $\angle MBO = \angle MOB = \angle DOT$ ....2 puncte

Cum $\angle OCB = \angle TDO$, rezultă $m(\angle OTD) = m(\angle BOC) = 90°$. Deci $MT \perp AD$ ....1 punct

Problema 3. a) Arătaţi că restul împărţirii unui pătrat perfect la 3 este egal cu 0 sau cu 1.

b) Un număr natural N este scris în baza 10 numai cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sau 7. Notăm cu a_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ numărul de apariţii ale cifrei i în scrierea numărului N. Ştiind că $a_i = 4i$ oricare ar fi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, arătaţi că numărul N nu este pătrat perfect.

Soluţie. a) Numerele naturale pot fi de forma $3k, 3k+1$ respectiv $3k+2$ deci pătratele acestora vor da la împărţirea cu 3 resturile 0 sau 1 2 puncte

b) Din şirul de rapoarte egale $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \cdots = \frac{a_7}{7} = 4$, rezultă $a_1 = 4, a_2 = 8, \ldots, a_7 = 28$. Prin urmare N este format din $1 \cdot 4$ cifre 1, $2 \cdot 4 = 8$ cifre 2, ... , $7 \cdot 28$ cifre 7 .... 2 puncte

Suma cifrelor lui N este, prin urmare, $S = 4(1^2 + 2^2 + \cdots + 7^2) = 560$ .... 1 punct

Cum 560 dă restul 2 la împărţirea cu 3, N nu poate fi pătrat perfect. .... 2 puncte

Problema 4. Determiaţi suma elementelor mulţimii

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n}{2} + \frac{m}{5}, m, n \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}\}.$$

Soluţie. Considerăm mulţimea

$$A = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2a + 5b, a, b = 1, 2, \ldots, 100\}.$$

Observăm că $1 \notin A, 3 \notin A$.

Cel mai mare număr par din A este obţinut pentru $a = b = 100$ şi este 700. Numărul 698 este obţinut pentru $a = 99, b = 100$. Cel mai mare număr impar din A este obţinut pentru $b = 99, a = 100$, fiind deci 695. Aşadar $697 \notin A$ şi $699 \notin A$. .... 2 puncte

Demonstrăm că orice număr natural mai mare sau egal cu 4 şi mai mic sau egal cu 696 aparţine mulţimii A. .... 1 punct

Dacă $y \leq 500$, fie r restul împărţirii lui y la 5. Astfel $y = 5c + r$ cu $0 \leq c \leq 100$ şi $0 \leq r \leq 4$. Dacă r este par, atunci $y = 5c + 2k$, unde $r = 2k$ iar dacă r este impar, atunci $y \geq 5$, deci $c \geq 1$ şi $y = 5(c-1) + 2(k+3)$, unde $r = 2k + 1$. .... 1 punct

Dacă $y > 500$, atunci $y = 500 + z$ cu $0 < z \geq 200$. Dacuă Dacă z este par, atunci $y = 5 \cdot 100 + 2k$, unde $z = 2k$ iar dacă z este impar, atunci $y \leq 695$, deci $z \leq 195$ şi $y = 5 \cdot 99 + 2(k+3)$, unde $z = 2k + 1$. ... 1 punct

Suma numerelor din A va fi

$$S = (1 + 2 + \cdots + 700) - (1 + 3 + 697 + 699) = 350 \cdot 697.$$

Prin urmare, suma elementelor lui M este $\frac{S}{10} = 35 \cdot 697$ .... 2 puncte

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.