Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

CLASA a IX-a

Problema 1. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, repectiv Q, astfel încât $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AC}$. Arătaţi că $\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{DB}$.

Problema 2. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm mulţimea A_n a tuturor numerelor de forma $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$; de exemplu, $A_2 = \{-3,-1,1,3\}$ şi $A_3 = \{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$. Determinaţi numărul elementelor mulţimii A_n.

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f(f(x))=[x]$, oricare ar fi numărul real x. Arătaţi că există numerele reale distincte a şi b astfel încât $|f(a)-f(b)|\geq|a-b|$.

Notă. $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Problema 4. Considerăm un număr real nenul a cu proprietatea că $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=1$. Arătaţi că $\{a^n\}+\{\frac{1}{a^n}\}=1$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Notă. $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a IX-a

Problema 1. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, repectiv Q, astfel încât $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AC}$. Să se arate că $\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{DB}$.

Soluţie. Notăm $m=\frac{AM}{AB}$, $n=\frac{BN}{BC}$, $p=\frac{DP}{DC}$, $q=\frac{AQ}{AD}$. Avem $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM}=(1-m)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$,

.... **1 punct**

$\overrightarrow{QP}=p\overrightarrow{AB}+(1-q)\overrightarrow{AD}$,

.... **1 punct**

deci, conform ipotezei, rezultă că $(1-m+p)\overrightarrow{AB}+(1-q+n)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

.... **1 punct**

Deoarece vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$ sunt necoliniari, deducem că $\boxed{\text{m=p}}$ şi $\boxed{\text{n=q}}$.

.... **2 puncte**

Pe de altă parte, $\overrightarrow{PN}=(1-p)\overrightarrow{AB}-(1-n)\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{QM}=m\overrightarrow{AB}-q\overrightarrow{AD}$,

.... **1 punct**

de unde $\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QM}=(1-p+m)\overrightarrow{AB}-(1-n+q)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

.... **1 punct**

Problema 2. Pentru fiecare un număr natural nenul n considerăm mulţimea A_n a tuturor numerelor de forma $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$; de exemplu, $A_2=\{-3,-1,1,3\}$ şi $A_3=\{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$. Să se determine numărul elementelor mulţimii A_n.

Soluţie. Cel mai mare element al mulţimii este $1+2+3\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

.... **1 punct**

Cel mai mare element al mulţimii este $-1-2-\cdots-n=-\frac{n(n+1)}{2}$

.... **1 punct**

Diferenţa oricăror două elemente ale mulţimii este pară,

.... **1 punct**

deci toate elementele au aceeaşi paritate.

.... **1 punct**

Demonstrăm că toate numerele dintre $-\frac{n(n+1)}{2}$ şi $\frac{n(n+1)}{2}$ şi de aceeaşi paritate cu acestea aparţin mulţimii A_n – şi numai acestea. Într-adevăr, fie $x \in A_n$, $x<\frac{n(n+1)}{2}$. Dacă o scriere a sa începe cu -1, schimbând semnul în $+1$ obţinem $x+2 \in A_n$.

.... **1 punct**

Dacă scrierea începe cu $+1$, căutăm primul termen al scrierii cu semnul $-$; fie acesta $-k$ (acesta există, altfel $x=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$):

$$x=+1+2+\cdots+(k-1)-k\pm\cdots\pm n.$$

Schimbând semnele termenilor $k-1$ şi k rezultă că $x+2 \in A_n$

.... **1 punct**

În concluzie, mulţimea A_n are $\frac{n(n+1)}{2}+1$ elemente.

.... **1 punct**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f(f(x)) = [x]$, oricare ar fi numărul real x. Să se arate că există numerele reale distincte a şi b astfel încât $|f(a) - f(b)| \geq |a - b|$.

Notă. $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Soluţie.

Arătăm că pentru orice n întreg avem $f(n) \in \mathbb{Z}$. Avem $f(f(f(x))) = f([x]) = [f(x)]$,

.... **2 puncte**

deci $f(n) = [f(n)]$ pentru n întreg, adică $f(n) \in \mathbb{Z}$.

.... **2 puncte**

Presupunând contrariul, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$ avem $|f(a)-f(b)| < |a-b|$. Atunci $|f(n+1) - f(n)| < 1$, unde n este întreg, deci $f(n) = f(n+1)$, de unde $f(n) = f(0)$, oricare ar fi n întreg.

.... **2 puncte**

Rezultă că $n = f(f(n)) = f(f(0)) = 0$, fals.

.... **1 punct**

Problema 4. Considerăm un număr real nenul a cu proprietatea că $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$. Să se arate că $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Notă. $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Soluţie. Deoarece $a + \frac{1}{a} = [a] + [\frac{1}{a}] + 1$, rezultă că $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$.

.... **1 punct**

Pentru fiecare n natural nenul notăm $s_n = a^n + \frac{1}{a^n}$. Avem

$$s_1 s_n = s_{n+1} + s_{n-1},$$

oricare ar fi $n \geq 2$, ... **1 punct**

şi $s_2 = a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \in \mathbb{Z}$

.... **1 punct**

deci, prin inducţie, $s_n \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi n natural nenul.

.... **1 punct**

Rezultă că $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = a^n + \frac{1}{a^n} - [a^n] - [\frac{1}{a^n}] = s_n - [a^n] - [\frac{1}{a^n}] \in \mathbb{Z}$.

Cum $\{x\} \in [0, 1)$, rezultă $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} \in \{0, 1\}$.

.... **1 punct**

Dacă $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 0$, atunci a^n şi $\frac{1}{a^n}$ sunt numere întregi, de unde $a^n = 1$, adică $a = \pm 1$.

.... **1 punct**

În acest caz $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 0 \neq 1$, contradicţie. Rămâne $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$, oricare ar fi n natural nenul.

.... **1 punct**