Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

CLASA a XI-a

Problema 1. a) Arătaţi că pentru $x, y \in \mathbb{R}$ expresia $\{x+y\} - \{y\}$ poate lua doar valorile $\{x\}$ sau $\{x\} - 1$.

b) Fie α un număr iraţional. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $a_n = \{n\alpha\}$ şi definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin

$$x_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdots(a_{n+1} - a_n).$$

Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi limita sa.

Notă. $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Problema 2. Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ unde $n \leq m$. Se ştie că $\text{rang} AB = n$ şi $(AB)^2 = AB$.

a) Arătaţi că $(BA)^3 = (BA)^2$.

b) Determinaţi BA.

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice nenule, astfel încât $AB + BA = O_2$ şi $\det(A+B) = 0$. Arătaţi că $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$.

Problema 4. Determinaţi funcţiile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$|x-y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x-y|,$$

pentru orice $x, y \in [0,1]$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011
CLASA a XI-a
SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Problema 1. a) Arătaţi că pentru $x, y \in \mathbb{R}$ expresia $\{x+y\} - \{y\}$ poate lua doar valorile $\{x\}$ sau $\{x\} - 1$.

b) Fie α un număr iraţional. Notăm pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_n = \{n\alpha\}$ şi definim şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prin

$$x_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_{n+1} - a_n).$$

Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi limita sa.

Soluţie. Din $y = [y] + \{y\}$ avem $x + y = [y] + [x] + \{x\} + \{y\}$ deci în cazul $\{x\} + \{y\} < 1$ avem $\{x+y\} - \{y\} = \{x\}$ iar în cazul $\{x\} + \{y\} \geq 1$ deducem din $x + y = [y] + [x] + 1 + \{x\} + \{y\} - 1$ că $\{x+y\} - \{y\} = \{x\} - 1$

.... 2 puncte

b) Din formula de mai sus $|a_{n+1} - a_n| = \{\alpha\}$ sau $|a_{n+1} - a_n| = 1 - \{\alpha\}$

.... 1 punct

Notand $b = \max\{\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\}\}$ şi observând că $0 < b < 1$ (a este iraţional), deducem

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = b < 1,$$

.... 2 puncte

ceea ce atrage $|x_{n+1}| \leq |x_1| b^n$, deci $\lim x_n = 0$

.... 2 puncte

Problema 2. Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ unde $n \leq m$. Ştiind că rang$AB = n$ şi $(AB)^2 = AB$:

a) Arătaţi că $(BA)^3 = (BA)^2$,

b) Determinaţi BA.

Soluţie. a) Din $(AB)^2 = AB$ prin înmulţire la stânga cu B şi la dreapta cu A obţinem $(BA)^3 = (BA)^2$

.... 2 puncte

b) Cum rangul produsului unor matrici este mai mare sau egal cu rangul oricărui factor, din $ABAB = AB$ deducem că rang$BA \geq n$, adică rang$BA = n$

.... 3 puncte

Aceasta înseamnă că matricea pătrată de ordin n BA este inversabilă şi relaţia dedusă la început $(BA)^3 = (BA)^2$ atrage prin simplificare $BA = I_n$.

.... 2 puncte

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice nenule astfel încât $AB + BA = O_2$ şi $\det(A+B) = 0$. Să se arate că $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$.

Soluţie. Prima condiţie din enunţ atrage $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ şi $(A-B)^2 = A^2 + B^2$

.... 2 puncte

De aici deducem şi $\det(A-B) = 0$.

Ecuaţiile caracteristice pentru $A+B$ şi $A-B$ devin

$$A^2 + B^2 - \operatorname{tr}(A+B)(A+B) = O_2, \;\; A^2 + B^2 - \operatorname{tr}(A-B)(A-B) = O_2,$$

Prin scădere obţinem

$$\operatorname{tr}(A)B = \operatorname{tr}(B)A.$$

.... 2 puncte

Dacă $\operatorname{tr}(A) = 0$, avem $\operatorname{tr}(B) = 0$ căci altfel ar rezulta $A = O_2$, în contradicţie cu prin ipoteza

.... 1 punct

Astfel $A = \lambda B$, ccea ce din $AB + BA = O_2$ atrage $\lambda B^2 = O_2$. Rezultă $\lambda = 0$, de unde $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B) = 0$

.... 2 puncte

Problema 4. Determinaţi funcţiile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$|x-y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x-y|,$$

pentru orice $x, y \in [0,1]$.

Soluţie. Condiţia $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$ atrage continuitatea funcţiei f.

.... 1 punct

Condiţia $|x-y|^2 \leq |f(x) - f(y)|$ implică injectivitatea, prin urmare f este strict monotonă.

.... 1 punct

Cum şi $-f$ verifică condiţiile din ipoteză, putem presupune f strict crescătoare.

Pentru $x = 0$ şi $y = 1$ deducem $0 \leq f(1) - f(0) \leq 1$ deci $f(1) = f(0) + 1$

.... 1 punct

Pentru $x \geq y$ obţinem $f(x) - f(y) \leq x - y$ sau $y - f(y) \leq x - f(x)$ ceea ce înseamnă că funcţia dată de $g(x) = x - f(x) + f(0)$ este crescătoare.

.... 1 punct

Cum $g(0) = g(1) = 0$ rezultă g funcţia nulă.

.... 2 puncte

Prin urmare soluţiile sunt funcţiile $f_a^{\pm}$ cu $f_a^{\pm}(x) = \pm x + a$ cu $a \in \mathbb{R}$

.... 1 punct