Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

CLASA a XII-a

Problema 1. Arătaţi că numărul $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\sin\frac{\pi}{13}}^{\cos\frac{\pi}{13}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ este raţional.

Problema 2. Fie G mulţimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z}_7,\ a \neq \hat{0}.$$

(a) Arătaţi că G este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

(b) Arătaţi că nu există morfisme nenule de la grupul G în grupul aditiv $\mathbb{Z}_7$.

Problema 3. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă şi crescătoare şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel

$$a_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right),$$

pentru orice $n \geq 1$.

a) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

b) Ştiind că există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_p = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, arătaţi că f este constantă.

Problema 4. Fie A un inel şi a un element al său. Arătaţi că:

(a) Dacă A este comutativ şi a este nilpotent, atunci $a + x$ este inversabil, oricare ar fi elementul inversabil $x \in A$.

(b) Dacă A este finit şi $a + x$ este inversabil, oricare ar fi elementul inversabil $x \in A$, atunci a este nilpotent.

(Un element a al unui inel se numeşte *nilpotent*, dacă există un număr întreg $n \geq 1$, astfel încât $a^n = 0$.)

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011
CLASA a XII-a
SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Problema 1. Arătaţi că numărul $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\sin\frac{\pi}{13}}^{\cos\frac{\pi}{13}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ este raţional.

Soluţie. Considerăm funcţia $F : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \displaystyle\int_{\sin t}^{\cos t} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Această funcţie este derivabilă, iar derivata ei este

$$F'(t) = (-\sin t)\sqrt{1-(\cos t)^2} - (\cos t)\sqrt{1-(\sin t)^2} = -(\sin t)^2 - (\cos t)^2 = -1.$$

.... 4 puncte

Deci $F(t) = -t + k$, $k \in \mathcal{C}$. Întrucât $F(\pi/4) = 0$, rezultă $k = \pi/4$, deci $F(t) = \pi/4 - t$. Prin urmare, $F(\pi/13)/\pi = (\pi/4 - \pi/13)/\pi = 9/52$, care este raţional. .... 3 puncte

Problema 2. Fie G mulţimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z}_7,\ a \neq \hat{0}.$$

(a) Arătaţi că G este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

(b) Arătaţi că nu există morfisme nenule de la grupul G în grupul aditiv $\mathbb{Z}_7$.

Soluţie. (a) Fie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

două matrice din G. Atunci

$$AB = \begin{pmatrix} ax & ay+b \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G,$$

deoarece $ax \neq \hat{0}$. Înmulţirea matricelor este asociativă, $I_2 \in G$ şi inversa matricei A este

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G.$$

.... 3 puncte

(b) Fie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix},$$

o matrice din G, cu $a \neq \hat{1}$. Cum

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & b(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + 1) \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix},$$

rezultă că $A^6 = I_2$. Fie f un morfism de la G în $\mathbb{Z}_7$. Atunci $\hat{0} = f(I_2) = f(A^6) = \hat{6}f(A)$, deci $f(A) = \hat{0}$. Cum $K = \{X : X \in G, f(X) = \hat{0}\}$ este subgrup cu cel puţin 36 de elemente, iar G are 42 de elemente, rezultă $K = G$. Deci $f(X) = \hat{0}$, oricare ar fi $X \in G$. ....4 puncte

Problema 3. Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continuă şi crescătoare şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel

$$a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right),$$

pentru orice $n \geq 1$.

a) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

b) Ştiind că există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_p = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, arătaţi că f este constantă.

Soluţie. a)

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) + \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

Deoarece $f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \leq f\left(\frac{k}{2^n}\right)$, rezultă că

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) = a_n.$$

....4 puncte

b) Fie $k \in \{1, 2, \ldots, 2^p\}$ şi $c \in \left(\frac{k-1}{2^p}, \frac{k}{2^p}\right)$ şi diviziunea $\Delta = (0, \frac{1}{2^p}, \cdots, \frac{k-1}{2^p}, c, \frac{k}{2^p}, \cdots, 1)$. Dacă S este suma superioară Darboux asociată acestei diviziuni, vom avea

$$a_p - S = \frac{1}{2^p} f(\frac{k}{2^p}) - f(c)(c - \frac{k-1}{2^p} 0 - f(\frac{k}{2^p})(\frac{k}{2^p} - c) = (f(\frac{k}{2^p}) - f(c))(c - \frac{k-1}{2^p}) \geq 0.$$

Cum $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq S \leq a_p = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, rezultă că $a_p = S$, deci $f(c) = f(\frac{k}{2^p})$. Aşadar f este constantă pe toate intervlele $(\frac{k-1}{2^p}, \frac{k}{2^p}], k = 1, 2, \ldots, 2^p$ cu reuniunea intervalul $(01]$. Din continuitate rezultă f constantă.
....3 puncte

Problema 4. Fie A un inel şi a un element al său. Arătaţi că:

(a) Dacă A este comutativ şi a este nilpotent, atunci $a + x$ este inversabil, oricare ar fi elementul inversabil $x \in A$.

(b) Dacă A este finit şi $a + x$ este inversabil, oricare ar fi elementul inversabil $x \in A$, atunci a este nilpotent.

(Un element a al unui inel se numeşte *nilpotent*, dacă există un număr întreg $n \geq 1$, astfel încât $a^n = 0$.)

Soluţie. **(a)** Fie x un element inversabil şi n un număr întreg strict pozitiv, astfel încât $a^n = 0$. Întrucât $a + x = x(x^{-1}a + 1)$, este suficient să arătăm că $x^{-1}a + 1$ este inversabil. Fie $b = x^{-1}a$. Inelul A fiind comutativ, rezultă că $b^n = x^{-n}a^n = 0$, deci şi $b^{2n+1} = 0$. Prin urmare,

$$1 = b^{2n+1} + 1 = (b+1)(b^{2n} - b^{2n-1} + \cdots - b + 1),$$

i. e., $b + 1$ este inversabil. .... 3 puncte

(b) Demonstrăm prin inducţie că $a^n - 1$ este inversabil, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 1$. Luând $x = -1$, rezultă că $a - 1$ este inversabil. Presupunem că $b = a^n - 1$ este inversabil. Din ipoteză rezultă că şi $a - b^{-1}$ este inversabil, deci şi $ab - 1 = (a - b^{-1})b$ este inversabil. Prin urmare,

$$a^{n+1} - 1 = a + (a(a^n - 1) - 1) = a + (ab - 1)$$

este inversabil.

Întrucât A este finit, există două numere întregi $q > p \geq 1$, astfel încât $a^p = a^q$, i. e., $a^p(a^{q-p} - 1) = 0$. Elementul $a^{q-p} - 1$ fiind inversabil, rezultă că $a^p = 0$. .... 4 puncte