# Concursul Naţional de Matematică „Arhimede”

## Ediţia a VIII-a. Etapa II. (26 februarie 2011)

## Clasa a II-a

**I.** *(3p)* **a)** Continuaţi şirul cu încă 3 termeni

91; 88; 87; 84; 83; 80; ___ , ___ , ___

*(3p)* **b)** Aflaţi suma numerelor naturale de forma $\overrightarrow{aa}$ mai mari decât 15 şi mai mici decât 55.

*(3p)* **c)** Mama are 46 de ani, iar fiica ei Diana are cu 19 ani mai puţin. Peste câţi ani vor avea împreună 75 de ani.

**II.** *(4p)* **a)** La jocul de SCRABBLE, Ioana, Mara şi Sara au realizat împreună 99 de puncte.
Cine a câştigat concursul dacă Ioana şi Mara au realizat împreună 66 de puncte, iar Mara şi Sara au obţinut împreună 51 de puncte?

*(5p)* **b)** Mă gândesc la un număr. Îi adaug cel mai mare număr natural impar de două cifre diferite şi obţin un număr mai mic cu 3 decât 100. La ce număr m-am gândit?

**III.** *(4p)* **a)** Se dau trei numere naturale consecutive, cel mai mare număr fiind 5. Găsiţi toate numerele naturale de două cifre a căror sumă a cifrelor să fie egală cu suma numerelor date.

*(5p)* **b)** Într-o cutie Ana are bomboane cu ciocolată şi bomboane cu mentă, în total 42 bomboane.

Cele cu mentă sunt cu 2 mai multe decât bomboanele cu ciocolată.
Câte bomboane din fiecare fel are Ana?

**IV.***(4p)*

**a)** Suma a două numere naturale de două cifre este 50. Cifra unităţilor primului număr este aceeaşi cu cifra unităţilor celui de-al doilea număr, adică 3.
Care este diferenţa celor 2 numere?

*(5p)* **b)** Nişte copii se joacă cu bile colorate şi au hotărât următoarea regulă de schimb:

– o bilă albă contra 2 bile roşii
– 3 bile roşii contra 2 bile negre
Andrei are 9 bile albe şi vrea numai bile negre.
Câte bile negre va avea după ce schimbă cu ceilalţi toate bilele albe?

***Notă:*** Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează fiecare de la 1 la 10 p. Se acordă un punct din oficiu la fiecare subiect. Timp de lucru: 1 oră şi 30 minute.

# Concursul Naţional de Matematică „Arhimede”

## Ediţia a VIII-a. Etapa II. (26 februarie 2011)

## Clasa a IX-a

**I.** Fie $a,b,c \in (0,\infty)$. Să se demonstreze că:

*(4p)* **1)** $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$;

*(5p)* **2)** $\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b} \geq 1$

*Dorin Mărghidanu*

**II.** Se consideră numerele reale *a, b, c, d* cu proprietatea că $0<a<b<c<d$ şi $A=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$.

*(4p)* **1)** Să se arate că dacă *a, b, c, d* sunt în progresie geometrică atunci mulţimea *A* are cinci elemente.

*(5p)* **2)** Să se dea exemplu de *a, b, c, d* care nu sunt în progresie geometrică şi cu proprietatea că *A* are cinci elemente.

*Dan Popescu*

**III.** Spunem că o funcţie $f: N^* \to N^*$ are proprietatea *(P)* dacă $f(1)=1$ şi

$$f(m+n)=f(m)+f(n)+2\sqrt{f(m)\cdot f(n)},\ (\forall)\ m,n \in N^*.$$

*(4p)* **1)** Dacă $f$ are proprietatea *(P)*, calculaţi *f(2), f(3)* şi *f(4).*

*(5p)* **2)** Determinaţi toate funcţiile cu proprietatea *(P).*

*Gheorghe Stoica, Petroşani*

**IV.** *(9p)* Să considerăm numerele naturale $n \geq 2$ şi $p \in N^*$. Să se demonstreze că pentru orice $\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}$ vectori în plan, este adevărată următoarea inegalitate :

$$\left\|\vec{v_1}\right\|^p+\left\|\vec{v_2}\right\|^p+\dots+\left\|v_n\right\|^p-\frac{1}{n^{p-1}}\left\|\vec{v_1}+\vec{v_2}+\dots+\vec{v_n}\right\|^p \geq \max_{1\leq i,j\leq n}\left(\left\|v_i\right\|^p+\left\|v_j\right\|^p-\frac{1}{2^{p-1}}\left\|\vec{v_i}+v_j\right\|^p\right)$$

***Notă:*** Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează fiecare de la 1 la 10 p. Se acordă un punct din oficiu la fiecare subiect. Timp de lucru: 3 ore.