Concursul Național de Matematică „Arhimede”

Ediția a VIII-a. Etapa II. (26 februarie 2011)

Clasa a V-a

I. Se consideră numerele: $2^7, 4^3, 16^2$

(3p) **a)** Să se scrie numerele în ordine crescătoare:

(3p) **b)** Să se scrie produsul celor trei numere ca o putere a lui 2;

(3p) **c)** Aflați cardinalul mulțimii

$$A = \{x \mid x \in N, 4^3 \le x < 2^7\}$$

II. *(4p)* **a)** Să se arate că numărul

$$5^n + 6^n + 2011$$

nu este pătrat perfect, oricare ar fi n natural.

(5p) **b)** Calculați ultima cifră a numărului

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + \ldots\ldots + 2009\cdot 2010\cdot 2011\cdot 2012$$

(revista Arhimede)

III. Fie $n = 13^0 + 13^1 + 13^2 + \ldots + 13^{2011}$

(4p) **a)** Să se arate că n este divizibil cu 7.

(5p) **b)** Să se afle restul împărțirii lui n la 61.

N.M. Goșoniu

IV. Se consideră mulțimea:

$$A = \{1,4,7,10,\ldots\ldots,2011\}$$

(3p) **a)** Să se afle suma celor mai mici 37 de elemente ale mulțimii A;

(3p) **b)** Numărul 2011 se scrie ca sumă de elemente distincte ale mulțimii A. Să se afle numărul maxim de termeni pe care îi poate avea această sumă.

(3p) **c)** Să se afle câte pătrate perfecte conține mulțimea A.

Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează fiecare de la 1 la 10 p. Se acordă un punct din oficiu la fiecare subiect. Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.

Concursul Național de Matematică „Arhimede”

Ediția a VIII-a. Etapa II. (26 februarie 2011)

Clasa a VI-a

I. *(3p)* **a)** Demonstrați că dacă $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{3}{4}$ atunci $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}=\frac{3}{4}$

Se consideră mulțimea: $A=\left\{\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}\,\middle|\,\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}=\frac{3}{4}\right\}$

(3p) **b)** Calculați cardinalul mulțimii A;

(3p) **c)** Calculați suma elementelor mulțimii A.

Marius Bulumac

II. *(4p)* **a)** Să se demonstreze egalitatea:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}=\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+\ldots+\frac{1}{2011}$$

(5p) **b)** Fie m și n numere naturale astfel încât:

$$\frac{m}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1333}-\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}$$

Să se arate că 2003 divide pe m.

(revista Arhimede)

III. Fie unghiurile AOB și OBP ascuțite și congruente, cu $(OA$ și $(BP$ în semiplane opuse față de OB. Dacă M este mijlocul segmentului $[OB]$ și d este o dreaptă care trece prin M astfel încât $d\cap OA=\{C\}$ și $d\cap BP=\{D\}$, atunci:

(4p) **a)** Demonstrați că $\Delta COM\equiv\Delta DBM$;

(5p) **b)** Dacă $[AO]\equiv[PB]$, arătați că punctele A, M, P sunt coliniare.

Cristina Godeanu

IV. Fie $\angle AOB$ un unghi alungit și în același semiplan mărginit de AB se consideră un număr maxim de puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ cu proprietățile:

a) $m(\angle AOA_1)=m(\angle BOB_1)=1^0$; $m(\angle A_1OA_2)=m(\angle B_1OB_2)=3^0$, $m(\angle A_2OA_3)=m(\angle B_2OB_3)=5^0,\ldots$

b) unghiurile A_iOA_{i+1} cu interioarele disjuncte 2 câte 2 și unghiurile B_iOB_{i+1} cu interioarele disjuncte 2 câte 2 pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$. Se cere:

(3p) **1)** Să se afle n;

(3p) **2)** Să se afle câte perechi de semidrepte $[OA_i$, $[OB_j$ coincid.

(3p) **3)** Să se afle câte perechi de semidrepte $[OA_i$, $[OB_j$ sunt perpendiculare.

prof. Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează fiecare de la 1 la 10 p. Se acordă un punct din oficiu la fiecare subiect. Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.

Concursul Național de Matematică „Arhimede”

Ediția a VIII-a. Etapa II. (26 februarie 2011)

Clasa a VII-a

I. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \sqrt{2}^{\,n} \mid n \in N, n \le 7 \right\}$

(3p) **a)** Calculați $A \cap N$;

(3p) **b)** Determinați suma elementelor mulțimii A.

(3p) **c)** Stabiliți dacă produsul elementelor din A este un număr natural.

Viorel Zlate

II. *(9p)* Numerele 1, 2, 3, ... , n sunt scrise pe tablă, $n \ge 3$.
Este permis să ştergem oricare două numere şi să scriem în locul lor diferența acestor numere? Să se afle valorile lui n pentru care există o modalitate de a şterge numerele astfel încât să obținem numai zerouri.

Traian Preda

III. *(9p)* În triunghiul ABC, $m(\angle A) = 90^0$, D este mijlocul laturii [BC] iar E este punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor ABC şi ADC. Să se afle $m(\angle BEC)$.

(rev. Arhimede)

IV. *(9p)* Demonstrați că nu există triunghiuri isoscele care să aibă un unghi de 36^0 şi lungimile laturilor exprimate prin numere naturale.

Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează fiecare de la 1 la 10 p. Se acordă un punct din oficiu la fiecare subiect. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică „Arhimede”

Ediția a VIII-a. Etapa II. (26 februarie 2011)

Clasa a VIII-a

I. Să dă relația: $\frac{x}{\sqrt{2}+1}+\frac{7}{2\sqrt{2}+1}=z$, unde $x,z\in R$

(3p) **a)** Dacă $x=1$, să se calculeze z:

(3p) **b)** Dacă $z=2$, să se calculeze x;

(3p) **c)** Aflați $x,z\in Z$ care verifică relația dată.

Cristian Olteanu

II. *(4p)* **a)** Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, atunci

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+ca+a^2}\geq 2$$

Ion Neaţă, Slatina

(5p) **b)** Să se demonstreze că:

$$\frac{1+a}{b+a^2}+\frac{1+b}{a+b^2}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\text{, pentru orice } a,b>0.$$

Traian Preda

III. *(9p)* În tetraedrul regulat $ABCD$ se consideră punctele $M\in(DB)$ şi $N\in(DC)$ astfel încât $DM=\frac{BM}{3}$ şi $\frac{DN}{DC}=\frac{3}{4}$ demonstrați că aria secțiunii determinate de planul *(AMN)* în tetraedru este mai mică decât $\frac{\ell^2}{3}$, unde ℓ reprezintă lungimea muchiei tetraedrului.

Cristina Godeanu

IV. *(9p)* Se consideră un punct M în interiorul unghiului XOY de măsură 30^0. Din punctul M se duc perpendicularele $MA\perp OX$ şi $MB\perp OY$, cu $A\in[OX$, $B\in[OY$. Se consideră apoi punctul D, mijlocul segmentului *[OM]*, în care se ridică perpendiculara VD pe planul unghiului XOY. Dacă $[OM]=[VD]=a>0$, să se calculeze distanța de la punctul V la dreapta AB.

Dan Nedeianu (rev. Arhimede)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează fiecare de la 1 la 10 p. Se acordă un punct din oficiu la fiecare subiect. Timp de lucru: 3 ore.