INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

I.S.M.B.

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 12.02.2011 -

CLASA A VII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Spunem că o mulţime nevidă $A \subset \mathbb{Q}_+$ cu n elemente se numeşte *mulţime medie* dacă are proprietatea: "Pentru oricare $x \in A$ şi oricare $y \in A$, rezultă $\frac{x+y}{2} \in A$ sau $\sqrt{xy} \in A$".

a) Demonstraţi că $n < 3$;

b) Arătaţi că, pentru $n = 2$, există o infinitate de *mulţimi medii.*

2. Arătaţi că $44 < \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2010}{2009} < 2011$.

3. Determinaţi numerele naturale m, n, şi p nenule şi distincte ştiind că

$$\frac{4}{1+m} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m+n+p} \geq 10.$$

4. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $m\left(\widehat{DAB}\right) < m\left(\widehat{ABC}\right)$.

Perpendiculara din punctul B pe dreapta AC intersectează segmentul (DC) în punctul F. Perpendiculara în punctul F pe dreapta DC intersectează segmentele (AC) şi (AB) în punctele P şi respectiv E. Dacă $BP \cap AD = \{Q\}$, demonstraţi că dreptele AC şi QE sunt perpendiculare.

Problema 2 a fost selectată din nr.2/2010 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice din România

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 12.02.2011 -

CLASA A VII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1

Spunem că o mulţime nevidă $A \subset \mathbb{Q}_+$ cu n elemente se numeşte *mulţime medie* dacă are proprietatea: "Pentru oricare $x \in A$ şi oricare $y \in A$, rezultă $\frac{x+y}{2} \in A$ sau $\sqrt{xy} \in A$".

a) Demonstraţi că $n < 3$;

b) Arătaţi că, pentru $n = 2$, există o infinitate de *mulţimi medii*.

prof. Cosmin Niţu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Ordonăm crescător elementele mulţimii A: $0 \le a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$.	**1p**
Presupunem că $n \ge 3$. Atunci $0 < a_2 < a_3$, deci $a_2 < \frac{x+y}{2} < a_3$ şi $a_2 < \sqrt{xy} < a_3$.	**2p**
Înseamnă că $\frac{x+y}{2} \notin A$ şi $\sqrt{xy} \notin A$, contradicţie. Deci $n < 3$.	**1p**
b) Fie a un număr raţional mai mare decât 0. Mulţimea $A = \{0; a\}$ este o *mulţime medie*	**2p**
deoarece $\sqrt{0 \cdot a} = 0 \in A$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}_+$. Rezultă concluzia.	**1p**

Problema 2

Arătaţi că $44 < \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot ... \cdot \frac{2010}{2009} < 2011$.

prof. Neculai Stanciu, Buzău

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot ... \cdot \frac{2010}{2009}$. Notăm $B = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2011}{2010} > 1$	**1p**
Avem $A > B$ şi $B > 1$	**1p**
Deasemenea $A \cdot B = 2011$	**2p**
Înmulţind prima relaţie cu A, obţinem $A^2 > A \cdot B > 2011 > 44^2$, deci $A > 44$	**2p**
Înmulţind a doua relaţie cu A, obţinem $A \cdot B = 2011 > A$	**1p**

Problema 3

Determinați numerele naturale m, n, și p nenule și distincte știind că

$$\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+n}+\frac{30}{m+n+p}\geq 10.$$

***

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem $m+1\geq 2$, deci $\frac{4}{1+m}\leq\frac{4}{2}=2$;	**2p**
Deasemenea $m+n\geq 3$, deci $\frac{9}{m+n}\leq\frac{9}{3}=3$	**1p**
Și $m+n+p\geq 6$, deci $\frac{30}{m+n+p}\leq\frac{30}{6}=5$.	**1p**
Prin adunarea membru cu membru a celor trei relații obținem $\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+n}+\frac{30}{m+n+p}\leq 10$, deci $\frac{4}{1+m}+\frac{9}{m+n}+\frac{30}{m+n+p}=10$	**2p**
Înseamnă că, în fiecare caz, trebuie îndeplinite egalitățile. Rezultă că $m=1$, $n=2$ și $m=3$	**1p**

Problema 4

4. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $m\left(\widehat{DAB}\right)<m\left(\widehat{ABC}\right)$.

Perpendiculara din punctul B pe dreapta AC intersectează segmentul (DC) în punctul F.

Perpendiculara în punctul F pe dreapta DC intersectează segmentele (AC) și (AB) în punctele P și respectiv E. Dacă $BP\cap AD=\{Q\}$, demonstrați că dreptele AC și QE sunt perpendiculare.

Detalii rezolvare	Barem asociat
E suficient să arătăm că $QE \parallel BF$.	**1p**
Cum $AE \parallel FC$, din *teorema lui Thales*, rezultă că $\frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PC}$.	**2p**
Deasemenea, deoarece $AQ \parallel BC$, din *teorema lui Thales*, rezultă că $\frac{PQ}{PB}=\frac{PA}{PC}$.	**2p**
Prin urmare, $\frac{PE}{PF}=\frac{PQ}{PB}$.	**1p**
Reciproca teoremei lui Thales ne asigură că $QE \parallel BF$, deci $QE\perp AC$.	**1p**