INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

I.S.M.B.

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 12.02.2011 -

CLASA A VIII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore.

1. a) Determinaţi valorile naturale ale lui m pentru care numerele $9m+7$ şi $16m+1$ sunt simultan pătrate perfecte.

b) Pentru oricare număr natural n, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor lui n. Demonstraţi că există două mulţimi infinite X şi Y de numere naturale cu proprietatea că , oricare ar fi $x \in X$ şi oricare ar fi $y \in Y$, numărul $s(x)-s(y)$ **nu** se divide cu 9 şi numărul $s\left(x^2\right)-s\left(y^2\right)$ se divide cu 9.

2. Numerele reale x şi y verifică relaţia $x^2+y^2+2\sqrt{2}\cdot x-2\sqrt{2}\cdot y+3=0$. Arătaţi că $x<y$.

3. Fie a şi b două numere raţionale diferite, $a \geq 0$. Considerăm mulţimea $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, unde $x_1=a,\ x_2=b$ şi $x_{n+1}=\dfrac{(n+2)\cdot x_n+n\cdot x_{n+2}}{(n+2)+n}$, oricare ar fi $n\in\{1;2;3\}$.

a) Exprimaţi, în funcţie de a şi b, elementele mulţimii A;

b) Dacă $A-\{a,b\}\subset\mathbb{N}$ şi $b<1$, determinaţi numărul a.

4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Fie O centrul pătratului $ABCD$ şi M mijlocul segmentului $[AO]$. Planul α conţine punctul M şi este paralel cu planul $(AB'D')$.

a) Demonstraţi că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul α;

b) Dacă planul α intersectează dreptele $B'C'$ şi $D'C'$ în punctele N şi respectiv P, arătaţi că punctul M este egal depărtat de planele $(A'B'C')$ şi (PNC).

Problema 2 a fost selectată din nr.10/2010 al *Gazetei Matematice*- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiinţe Matematice din România

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 12.02.2011 -

CLASA A VIII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1

a) Determinaţi valorile naturale ale lui m pentru care numerele $9m+7$ şi $16m+1$ sunt simultan pătrate perfecte.

b) Pentru oricare număr natural n, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor lui n. Demonstraţi că există două mulţimi infinite X şi Y de numere naturale cu proprietatea că , oricare ar fi $x \in X$ şi oricare ar fi $y \in Y$, numărul $s(x)-s(y)$ **nu** se divide cu 9 şi numărul $s(x^2)-s(y^2)$ se divide cu 9.

Prof. Mircea Fianu, Bucureş

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $9m+7=p^2$ şi $16m+1=q^2$, unde $p,q\in\mathbb{N}$. Rezultă că $16\cdot(9m+7)=144m+112=16p^2=(4p)^2$ şi $9\cdot(16m+1)=144m+9=9q^2=(3q)^2$.	**1p**
Prin scădere obţinem $(4p)^2-(3q)^2=103$, adică $(4p-3q)\cdot(4p+3q)=103$.	**1p**
Rezultă că $4p-3q=1$ şi $4p+3q=103$, de unde $p=13$ şi $m=18$.	**1p**
b) Considerăm, de exemplu, $X=\{9k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}$ şi $Y=\{9k+8 \mid k\in\mathbb{N}\}$.	**1p**
Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, restul împărţirii lui n la 9 este egal cu restul împărţirii lui $s(n)$ la 9,	**1p**
Pentru oricare $x\in X$ şi oricare $y\in Y$, numărul $s(x)-s(y)$ nu se divide cu 9.	**1p**
Pentru oricare $x\in X$ şi oricare $y\in Y$, avem $x^2=M9+1$ şi $y^2=M9+1$, deci $s(x^2)-s(y^2)=M9$.	**1p**

Problema 2

Numerele reale x şi y verifică relaţia $x^2+y^2+2\sqrt{2}\cdot x-2\sqrt{2}\cdot y+3=0$. Arătaţi că $x<y$.

Prof. V. Scurtu, Bistriţa

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Relaţia din enunţ se mai scrie $\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=1$.	**2p**
Înseamnă că $\left(x+\sqrt{2}\right)^2\le 1$ şi $\left(y-\sqrt{2}\right)^2\le 1$.	**2p**
Obţinem $-1\le x+\sqrt{2}\le 1$, adică $-1-\sqrt{2}\le x\le 1-\sqrt{2}<0$ şi	**1p**
$-1\le y-\sqrt{2}\le 1$, adică $0<\sqrt{2}-1\le y\le\sqrt{2}+1$.	**1p**
Rezultă că $x<0<y$.	**1p**

Problema 3

Fie a şi b două numere raţionale diferite, $a \geq 0$. Considerăm mulţimea $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, unde $x_1=a,\ x_2=b$ şi $x_{n+1}=\dfrac{(n+2)\cdot x_n+n\cdot x_{n+2}}{(n+2)+n}$, oricare ar fi $n\in\{1;2;3\}$.

a) Exprimaţi, în funcţie de a şi b, elementele mulţimii A;

b) Dacă $A-\{a,b\}\subset\mathbb{N}$ şi $b<1$, determinaţi numărul a.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

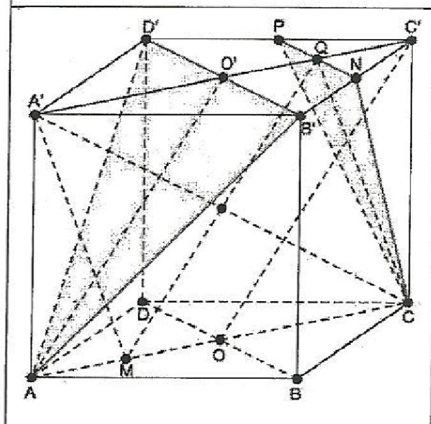
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Obţinem $x_3=4b-3a,\ x_4=10b-9a,\ x_5=20b-19a$.	**2p**
b) Deoarece $x_3\geq 0$, rezultă că (*) $4b\geq 3a\geq 0$, deci $b>0$.	**1p**
Deoarece $4b-3a\in\mathbb{N}$, rezultă că $3\cdot(4b-3a)=12b-9a\in\mathbb{N}$ şi,	**1p**
cum $10b-9a\in\mathbb{N}$, rezultă că $2b=k\in\mathbb{N}$, adică $0<b=\dfrac{k}{2}<1$, deci $b=\dfrac{1}{2}$.	**1p**
Avem $2-3a\in\mathbb{N}$ şi $10-19a\in\mathbb{N}$, adică $3a\in\mathbb{N}$ şi $19a\in\mathbb{N}$. Prin urmare, $19a-6\cdot 3a=a\in\mathbb{N}$. Dar, din (*), deducem $a\leq\dfrac{4}{3}\cdot b=\dfrac{2}{3}$, deci $a=0$	**2p**

Problema 4

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Fie O centrul pătratului $ABCD$ şi M mijlocul segmentului $[AO]$. Planul α conţine punctul M şi este paralel cu planul $(AB'D')$.

a) Demonstraţi că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul α;

b) Dacă planul α intersectează dreptele $B'C'$ şi $D'C'$ în punctele N şi respectiv P, arătaţi că punctul M este egal depărtat de planele $(A'B'C')$ şi (PNC).



Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Este suficient ca $A'C\perp(AB'D')$	**1p**
$AB'\perp A'B$ şi $AB'\perp BC$, deci $AB'\perp(A'BC)$. Cum $A'C\subset(A'BC)$, rezultă $A'C\perp AB'$. Analog, se demonstrează că $A'C\perp AD'$. Deci $A'C\perp(AB'D')$, adică $A'C\perp\alpha$.	**2p**
b) Fie O' centrul bazei $A'B'C'D'$ şi Q mijlocul segmentului $[O'C']$. Patrulaterul $O'AMQ$ este paralelogram, deci $MQ\parallel AO'$, adică $MQ\subset\alpha$.	**1p**
Planul $(A'B'C')$ intersectează planele paralele $(AB'D')$ şi α după dreptele paralele $B'D'$ şi $NP\supset\{Q\}$. Deoarece $PN\perp A'C'$ şi $PN\perp A'A$, rezultă că $PN\perp(A'AC)$. Deci planele (PNC) şi $(A'AC)$ sunt perpendiculare	**1p**
Deasemenea, planele $(A'AC)$ şi $(A'B'C')$ sunt perpendiculare. Prin urmare, distanţele de la punctul M la planele $(A'B'C')$ şi (PNC) sunt egale cu distanţele de la punctul M la dreptele $A'C'$ şi respectiv QC.	**1p**
Patrulaterul $MCQA'$ are laturile $[MC]$ şi $[QA']$ paralele şi congruente, iar diagonalele MQ şi $A'C$ sunt perpendiculare, deci acesta este romb. Înseamnă că înălţimile din M corespunzătoare laturilor $[QA']$ şi $[QC]$ sunt congruente.	**1p**