OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
12.02.2011
CLASA a IX a - M1

1. Determinați suma $S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $n \in N^*$, si demonstrați formula găsită prin metoda inducției matematice .
2. Demonstrați că pentru orice $n \in N^*$ avem:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}+\frac{\sqrt{n+2}}{n+3}+...+\frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3}<\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+4}}.$$

3. Rezolvați ecuația : $\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]=1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numarului real a.
4. Fie A_1, B_1, C_1 proiecțiile centrului de greutate G al triunghiului ABC pe laturile sale , de lungimi a,b,c. Arătați că $a^2\cdot\overrightarrow{GA_1}+b^2\cdot\overrightarrow{GB_1}+c^2\cdot\overrightarrow{GC_1}=0$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
12.02.2011
CLASA a X a - M1

1. Fie $a > \frac{1}{2}$ si multimile $A = \{z \in C \mid |z| \le a\}$, $B = \{z \in C \mid |z - 1 - i| \le 2a\}$. Aratati ca

   $|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)| \le a\sqrt{2}$, pentru orice $z \in A \cap B$.

2. Se considera sirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $(\forall) n \in N^*$. Sa se determine termenul general a_n si sa se calculeze $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

3. Să se rezolve în N ecuaţiile:

   a) $13^x + 12^x - 5^x = 2^{x+1} \cdot \sqrt{39^x}$;

   b) $\log_2(16 - x) = 9 \cdot \log_x 2$.

4. Sa se rezolve ecuatia : $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
12.02.2011
CLASA a XI a - M1

1. Sa se calculeze limitele:

   a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

   b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\ldots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}\cos^2 x & \sin^2 x\\ \sin^2 x & \cos^2 x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$. Sa se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\det A^k}{\det\left(\sum_{k=1}^{n}A^k\right)}$.

3. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

   a) Să se rezolve ecuația $\det(A-\lambda I_3)=0$.

   b) Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n}A^k$.

4. Pentru $m, p\in\mathbb{N}^*$ fie $L(m,p)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{m+p}+3^{m+p}+\ldots+n^{m+p}}{n^p\cdot\left(1+2^m+3^m+\ldots+n^m\right)}$.

   a) Să se calculeze $L(m,p)$.

   b) Să se determine $m, p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $L(m,p)\in\left[\frac{3}{4},\frac{6}{7}\right)$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte