Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
12 februarie 2011

Clasa a IX-a

Problema 1.

Să se determine numerele naturale nenule distincte a, b, c pentru care $\frac{1}{a \cdot b}+\frac{1}{a \cdot c}+\frac{1}{b \cdot c} \in \mathbb{N}$.

Dudău Mitică, profesor, Galați

Problema 2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\{x\}+\{3 \cdot x\}+\left\{\frac{2 \cdot x+1}{2}\right\}=\{2 \cdot x\}+\left\{\frac{3 \cdot x+1}{3}\right\}+\left\{\frac{3 \cdot x+2}{3}\right\}$, unde s-a notat prin $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a.

Dumitru şi Rodica Balan, profesori, Galați

Problema 3.

Fie şirul de numere naturale $(c_n)_{n \in N^*}$ definit astfel: c_n = cel mai mic întreg de forma 3^k mai mare sau egal cu n, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$. Notăm cu $S_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a). Să se calculeze S_1, S_3, S_9, S_{27} şi S_{29};

b). Să se calculeze S_n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problemă prelucrată de **Guiță Visilina, profesor, Galați**

Problema 4.

Fie patrulaterul convex $ABCD$.

a). Dacă M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele laturilor $(AB),(BC),(CD)$ şi (DA), iar punctele E şi F sunt respectiv mijloacele diagonalelor (AC), (BD) atunci dreptele MP, NQ şi EF sunt concurente.

b). Dacă G_1, G_2, G_3, G_4 sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ şi $\triangle ABC$, atunci dreptele AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 sunt concurente.

Problemă selectată de Guiță Visilina, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

12 februarie 2011

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Din a,b,c numere naturale nenule, distincte $\Rightarrow \frac{1}{a\cdot b}\le\frac{1}{2};\ \frac{1}{a\cdot c}\le\frac{1}{2};\ \frac{1}{b\cdot c}\le\frac{1}{2}\Rightarrow$ $\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot c}+\frac{1}{b\cdot c}\le\frac{3}{2}$. Dar $\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot c}+\frac{1}{b\cdot c}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot c}+\frac{1}{b\cdot c}=1.$	2p
	Presupunem, fără a restrânge generalitatea problemei că $a<b<c$; Dacă a $\ge 2\Rightarrow\frac{1}{a\cdot b}\le\frac{1}{6};\ \frac{1}{a\cdot c}\le\frac{1}{8};\ \frac{1}{b\cdot c}\le\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot c}+\frac{1}{b\cdot c}\le\frac{3}{8}<1$(nu convine)$\Rightarrow a<2$ Cum $a\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a=1,$ iar relația (1)devine: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b\cdot c}=1\ (2).$	3p
	Dacă b>2 $\Rightarrow$ c>3 $\Rightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b\cdot c}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$(contrazice relația$(2)$)$\Rightarrow b=2.$ Relația (2) devine $\frac{1}{2}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2\cdot c}=1\Rightarrow c=3.$ Aşadar $a=1;\ b=2;\ c=3.$	2p
2.	Ecuația dată se scrie astfel: $x-[x]=\left([x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]-[2x]\right)-\left([x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]-[3x]\right)+\frac{1}{2}.$	2p
	Din identitatea lui Hermite, $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]=0,\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*,$	2p

	ecuația obținută devine $x-[x]=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \{x\}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{k+\frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	**3p**
	$c_1=3^0; S_1=1; c_2=c_3=3^1; S_3=S_1+c_2+c_3=1+2\cdot 3^1=7;$ $c_4=c_5=c_6=c_7=c_8=c_9=3^2;$ $S_9=S_{3^2}=1+2\cdot 3^1+(3^2-3^1)\cdot 3^2=1+2\cdot 3^1+2\cdot 3^3=1+2\cdot(3^1+3^3)=61;$ $c_{10}=c_{11}=...=c_{27}=3^3;$ $S_{27}=S_{3^3}=3^0+2\cdot 3^1+6\cdot 3^2+18\cdot 3^3=3^0+2\cdot(3^1+3^3+3^5)=547.$ $S_{29}=S_{27}+c_{28}+c_{29}=S_{27}+3^4+3^4=S_{3^3}+2\cdot 3^4=547+162=709.$	**3p**
3.	**b). Cazul** $n=3^p, p \in \mathbb{N}^*$. Numărul termenilor şirului $(c_n)_{n\in N^*}$, $3^k < c_n \le 3^{k+1}$,este $3^{k+1}-3^k=2\cdot 3^k, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$. Aşadar obținem: $S_{3^p}=c_1+(c_2+c_3)+(c_4+c_5+...+c_9)+...+(c_{3^{p-1}+1}+c_{3^{p-1}+2}+...+c_{3^p})=$ $=3^0+(3^1-3^0)\cdot 3+(3^2-3^1)\cdot 3^2+(3^3-3^2)\cdot 3^3+...+(3^p-3^{p-1})\cdot 3^p$ $=3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^3+2\cdot 3^5+...+2\cdot 3^{2p-1}=3^0+2\cdot 3^1\cdot\frac{(3^2)^p-1}{3^2-1}=\frac{3^{2p+1}+1}{4}.$	**2p**
	Cazul $n=3^p+q$ *unde* $0<q<3^{p+1}-3^p=2\cdot 3^p,\ q,p \in \mathbb{N}^*$. Atunci $S_{3^p+q}=S_{3^p}+c_{3^p+1}+c_{3^p+2}+...+c_{3^p+q}=S_{3^p}+q\cdot 3^{p+1}=\frac{3^{2p+1}+1}{4}+q\cdot$	**2p**
4.	a).Patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. Fie $MP\cap NQ=\{O\}$. În $\triangle$OAC: $\overrightarrow{OE}$ vector mediana $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$ În $\triangle$OBD: $\overrightarrow{OF}$ vector mediana $\Rightarrow \overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\cdot\overrightarrow{OM};$ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\cdot\overrightarrow{OP}$ $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OF}\Rightarrow\overrightarrow{OE}=$ E,O,F puncte coliniare si $[EO]\equiv[OF]$.	**3p**

	b). Din ipoteză $\Rightarrow \overrightarrow{DG_1} = 2 \cdot \overrightarrow{G_1 N} \Rightarrow \overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \Rightarrow$ $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AO} \Rightarrow A, O, G_1$ coliniare $\Rightarrow \mathrm{O} \in \mathrm{AG}_1$; Analog, se demonstrează că $O \in BG_2$; $\mathrm{O} \in CG_3$; $\mathrm{O} \in \mathrm{DG}_4$; Aşadar, $\mathrm{AG}_1 \cap BG_2 \cap CG_3 \cap \mathrm{DG}_4 = \{O\}$.	**4p**

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
12 februarie 2011

Clasa a X-a

Problema 1.

Fie funcția $f:[0;4]\to[1;5]$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & x\in[0;3]\\ 3\cdot x-7, & x\in(3;4]\end{cases}$.

Să se demonstreze că funcția f este bijectivă şi să se determine f^{-1}.

Problemă selectată de Zamfir Romeo, profesor, Galați

Problema2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuația $x\cdot 2011^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2011^{x}=4022$

Veronica Grigore, profesor, Galați

Problema 3.

Fie $z\in\mathbb{C}$, $|z|=1$**.** Să se demonstreze că:

$$\left|1+1005z^{2010}\right|+\left|1-z^{2011}\right|+\left|1+1006z^{2011}\right|+\left|1+z^{2012}\right|\ge 2011.$$

Antohe Florin, profesor, Galați

Problema 4.

Fie $D\subset[0;1]$ o mulțime cu cel puțin 9 elemente, $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, $2\cdot a+b=2$ şi funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+2008$. Să se arate că există $\alpha,\beta\in D, \alpha\ne\beta$ astfel încât $\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|\le\frac{1}{4}$.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

12 februarie 2011

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Fie funcțiile $g:[0;3]\to[1;5],\ g(x)=\sqrt{x+1}$ şi $h:(3;4]\to[1;5],\ h(x)=3\cdot x-7$. Funcția f este injectivă dacă şi numai dacă (funcția g este injectivă) şi (funcția h este injectivă) şi $\operatorname{Im} g\cap \operatorname{Im} h=\varnothing$. Funcția f este surjectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} g\cup \operatorname{Im} h=[1;5]$. $\operatorname{Im} g=[1;2]$ şi $\operatorname{Im} h=(2;5]$ Funcția f este bijectivă $\Leftrightarrow f$ inversabilă.	**5p**
	$f^{-1}:[1;5]\to[0;4],\ f^{-1}(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in[1;2] \\ \dfrac{x+7}{3}, & x\in(2;5] \end{cases}$	**2p**
2.	Dacă $x<0$, atunci membrul stâng este <0, ceea ce nu este posibil, deci $x>0$.	**1p**
	Din inegalitatea mediilor avem: $x\cdot 2011^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2011^{x}\geq 2\sqrt{x\cdot 2011^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot 2011^{x}}=2\sqrt{2011^{\frac{1}{x}+x}}$	**3p**
	Aplicând inegalitatea mediilor numerelor $\frac{1}{x}$ şi $x\ \Rightarrow \frac{1}{x}+x\geq 2\Rightarrow$ $x\cdot 2011^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2011^{x}\geq 2\sqrt{2011^{2}}=4022$; egalitate pentru $x=1$.	**3p**
3.	Ținând cont că $\|z\|=1$ scriem inegalitatea sub forma: $\left\|z+1005z^{2011}\right\|+\left\|-z+z^{2012}\right\|+\left\|1+1006z^{2011}\right\|+\left\|-1-z^{2012}\right\|\geq 2011.$	**3p**

	Aplicând inegalitatea modulelor se obține că: $\left\|z+1005z^{2011}\right\|+\left\|-z+z^{2012}\right\|+\left\|1+1006z^{2011}\right\|+\left\|-1-z^{2012}\right\|\geq$ $\geq\left\|z+1005z^{2011}-z+z^{2012}+1+1006z^{2011}-1-z^{2012}\right\|=\left\|2011z^{2011}\right\|=2011.$	**4p**
4.	Considerăm o partiție cu 8 mulțimi a intervalului $[0;1]$ formată din următoarele intervalele $\left[0;\frac{1}{8}\right),\left[\frac{1}{8};\frac{2}{8}\right),\left[\frac{2}{8};\frac{3}{8}\right),...,\left[\frac{7}{8};1\right]$. Având în vedere că $D\subset[0;1]$ şi faptul că D are cel puțin 9 elemente, folosind principiul lui Dirichlet, rezultă există $\alpha,\beta\in D,\ \alpha\neq\beta$ conținute în acelaşi interval din partiție.	**2p**
	Prin urmare, $\|\alpha-\beta\|\leq\frac{1}{8}\Leftrightarrow 2\cdot\|\alpha-\beta\|\leq\frac{1}{4}$, inegalitate notată cu (1).	**2p**
	Dar, $\|f(\alpha)-f(\beta)\|=\|\alpha-\beta\|\cdot(a\cdot(\alpha+\beta)+b)\leq\|\alpha-\beta\|\cdot(a\cdot 2+b)=2\cdot\|\alpha-\beta\|$, inegalitate notată cu (2). Din (1) şi (2) rezultă că $\|f(\alpha)-f(\beta)\|\leq\frac{1}{4}$ şi, astfel, problema este rezolvată.	**3p**

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
12 februarie 2011

Clasa a XI-a

Problema 1.

Să se calculeze şi să se discute după valorile parametrului real m

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-3x^2-2}+\sqrt[4]{x^4-4x^3-3}+\ldots+\sqrt[2011]{x^{2011}-2011x^{2010}-2010}+2010mx\right).$$

Rodica şi Dumitru Balan, profesori, Galați

Problema 2.

Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ mărginit şi $2\cdot x_{n+2}+x_n\leq 3\cdot x_{n+1},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Duma Iuliana, profesor, Galați

Problema 3.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2011 & -2011\\ 2011 & 1 & 0\\ 2011 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot$ Să se calculeze $A^n, n\in\mathbb{N}^*\cdot$

Antohe Florin, profesor, Galați

Problema 4.

Se consideră matricea $A\in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietățile:

i). $\text{Tr } A=\sqrt{502}$

ii). $\det A=4+\sqrt{3}$.

Să se calculeze $\det\left(A^2+4\cdot I_2\right)$.

(Tr A= urma matricei A).

Totolici Mihai, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
12 februarie 2011

Clasa a XII-a

Problema 1.

Să se determine primitivele funcției $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arccos(\cos 2x)$.

Rodica şi Dumitru Balan, profesori, Galați

Problema 2.

Fie $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^n x}\,dx,\ n\ge 1.$

a) Să se calculeze I_1;

b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent şi să se calculeze limita lui.

Conf. dr. Jenică Crînganu, Universitatea Galați

Problema 3.

Pe mulțimea G=[0,1) se defineşte legea de compoziție $x*y=\{x+y\}$, $\forall\, x,y\in G,$ unde $\{a\}$ este partea fracționară a lui $a\in\mathbb{R}$.

a). Să se demonstreze că $(G,*)$ este grup abelian.

b). Dacă $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$ şi $G_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n}\right\}\subset G$, să se demonstreze că $(G_n,*)$ este subgrup al grupului $(G,*)$.

c). Să se rezolve ecuația $x^2*x=\frac{1}{2}$, $x\in G.$

Problemă selectată de Guiță Visilina, profesor , Galați

Problema 4.

Să se rezolve în $M_2(\mathbb{Z}_3)$ ecuația $X^{2012}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

Guiță Visilina, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

12 februarie 2011

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluție, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3}}+\sqrt[4]{1-\frac{3}{x}-\frac{3}{x^4}}+\ldots+\sqrt[2011]{1-\frac{2011}{x}-\frac{2010}{x^{2011}}}+2010m\right)\right]=$ $=\begin{cases}-\infty,\ m\in(-\infty;-1)\\ \infty\cdot 0(\text{caz exceptat}),\ m=-1\\ \infty,\quad \text{m}\in(-1;\infty)\end{cases}$	**3p**
	Dacă $m=-1$ atunci : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-3x^2-2}+\sqrt[4]{x^4-4x^3-3}+\ldots+\sqrt[2011]{x^{2011}-2011x^{2010}-2010}-2010x\right)=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-2x-1}-x\right)+\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2-2}-x\right)+\ldots+\left(\sqrt[2011]{x^{2011}-2011x^{2010}-2010}-x\right)\right]=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}+x}+\frac{-3x^2-2}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2-2\right)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x^2-2}+x^2}+\ldots+$ $\frac{-2011x^{2010}-2010}{\sqrt[2011]{\left(x^{2011}-2011x^{2010}-2010\right)^{2010}}+\ldots+x^{2009}\cdot\sqrt[2011]{\left(x^{2011}-2011x^{2010}-2010\right)}+x^{2010}}=$ $=-\left(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{de\ 2010\ ori}\right)==-2010$	**4p**
2.	Relația $2\cdot x_{n+2}+x_n\le 3\cdot x_{n+1}$ se poate scrie convenabil astfel: $2\cdot x_{n+2}-x_{n+1}\le 2\cdot x_{n+1}-x_n$. Dacă notăm $\text{y}_n=2\cdot x_{n+1}-x_n$, atunci $\text{y}_{n+1}\le y_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul $(y_n)_{n\ge1}$ este descrescător. Cum $(x_n)_{n\ge1}$ este mărginit, rezultă că există $\text{M}\in\mathbb{R}^*$, astfel încât $\lvert x_n\rvert\le M$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ și $\lvert y_n\rvert\le 2\cdot\lvert x_{n+1}\rvert+\lvert x_n\rvert\le 3\cdot M$. Deci șirul $(y_n)_{n\ge1}$ este descresctor și mărginit și conform teoremei lui Weierstrass, converge la marginea lui inferioară. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$, $\text{y}\in\mathbb{R}$.	**2p**

	Să demonstrăm că $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent. $y_n = 2\cdot x_{n+1} - x_n \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot y_{n-1} = x_n - \frac{1}{2}\cdot x_{n-1}\\ \frac{1}{2^2}\cdot y_{n-1} = \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2^2}\cdot x_{n-2}\\ \dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{2^{n-1}}\cdot y_1 = \frac{1}{2^{n-2}}x_2 - \frac{1}{2^{n-1}}\cdot x_1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot y_{n-1} + \frac{1}{2^2}\cdot y_{n-2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot y_1 = x_n - \frac{1}{2^{n-1}}\cdot x_1$	**3p**
	$x_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot x_1 + \frac{2^{n-2}\cdot y_{n-1} + 2^{n-3}\cdot y_{n-2} + \dots + y_1}{2^{n-1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\cdot x_1 = 0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\cdot y_{n-1} + 2^{n-3}\cdot y_{n-2} + \dots + y_1}{2^{n-1}} \underset{Cezaro}{\overset{Stolz}{=}} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cdot y_n}{2^n - 2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$ In concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x_n)_{n\geq1}$ este convergent.	**2p**
3.	Fie $A = I_3 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 2011 & -2011\\ 2011 & 0 & 0\\ 2011 & 0 & 0\end{pmatrix}$ Se constată că $B^3 = O_3 \Rightarrow B^k = O_3$, pentru $(\forall)$k $\in \mathbb{N}$, k ≥ 3.	**2p**
	. Folosind formula binomului lui Newton obținem: $A^n = I_3 + C_n^1\cdot B + C_n^2\cdot B^2\cdot$ $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2011^2 & -2011^2\\ 0 & 2011^2 & -2011^2\end{pmatrix}$	**3p**

	$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2011\cdot n & -2011\cdot n \\ 2011\cdot n & 1+\frac{n\cdot(n-1)\cdot 2011^2}{2} & -\frac{n\cdot(n-1)\cdot 2011^2}{2} \\ 2011\cdot n & \frac{n\cdot(n-1)\cdot 2011^2}{2} & 1-\frac{n\cdot(n-1)\cdot 2011^2}{2} \end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N}^*$	**2p**
4.	Fie A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Din relația lui Hamilton-Cayley $\Rightarrow A^2+4\cdot I_2=4\cdot I_2+(trA)\cdot A-\det A\cdot I_2\Rightarrow A^2+4\cdot I_2=\sqrt{502}\cdot A-\sqrt{3}\cdot I$	**3p**
	Atunci $A^2+4\cdot I_2=\begin{pmatrix} \sqrt{502}\cdot a-\sqrt{3} & \sqrt{502}\cdot b \\ \sqrt{502}\cdot c & \sqrt{502}\cdot d-\sqrt{3} \end{pmatrix}$;	**1p**
	$\det\left(A^2+4\cdot I_2\right)=502\cdot(a\cdot d-b\cdot c)-\sqrt{3}\cdot\sqrt{502}\cdot(a+d)+3=$ $=502\cdot\det A-\sqrt{3}\cdot\sqrt{502}\cdot(TrA)+3=502\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\cdot\sqrt{502}\cdot\sqrt{502}+3=$ $=502\cdot 4+3=2011.$	**3p**

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
12 februarie 2011

Clasa a XII-a

Problema 1.

Să se determine primitivele funcției $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos(\cos 2x)$.

Rodica şi Dumitru Balan, profesori, Galați

Problema 2.

Fie $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^n x}\,dx, n\geq 1.$

a) Să se calculeze I_1;

b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita lui.

Conf. dr. Jenică Crînganu, Universitatea Galați

Problema 3.

Pe mulțimea G=[0,1) se defineşte legea de compoziție $x*y=\{x+y\}$ $,\forall x,y\in G,$unde $\{a\}$ este partea fracționară a lui $a\in\mathbb{R}$.

a). Să se demonstreze că $(G,*)$ este grup abelian.

b). Dacă $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi $G_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n}\right\}\subset G$, să se demonstreze că $(G_n,*)$ este subgrup al grupului $(G,*)$.

c). Să se rezolve ecuația $x^2*x=\frac{1}{2}$, $x\in G.$

Problemă selectată de Guiță Visilina, profesor , Galați

Problema 4.

Să se rezolve în $M_2(\mathbb{Z}_3)$ ecuația $X^{2012}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

Guiță Visilina, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluție, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$\arccos(\cos a) = a,\ \forall\ a \in [0,\pi]$. $x \in [0,2\pi] \Rightarrow 2\cdot x \in [0,4\pi] \Rightarrow 2\cdot x \in [0,\pi) \cup [\pi,2\pi) \cup [2\pi,3\pi) \cup [3\pi,4\pi]$; 1). $2\cdot x \in [0,\pi) \Rightarrow f(x) = \arccos(\cos(2x)) = 2x$; 2). $2\cdot x \in [\pi,2\pi) \Rightarrow 2\cdot x - \pi \in [0,\pi)$; fie $y = 2\cdot x - \pi \in [0,\pi) \Rightarrow 2x = y + \pi$; $f(x) = \arccos(\cos(y+\pi)) = \arccos(-\cos y) = \pi - y = \pi - 2x + \pi = 2\pi - 2x$; 3). $2\cdot x \in [2\pi,3\pi) \Rightarrow 2\cdot x - 2\pi \in [0,\pi)$; fie $y = 2\cdot x - 2\pi \in [0,\pi) \Rightarrow 2x = y + 2\pi$; $f(x) = \arccos(\cos(y+2\pi)) = \arccos(\cos y) = y = 2x - 2\pi$; 4). $2\cdot x \in [3\pi,4\pi] \Rightarrow 2\cdot x - 3\pi \in [0,\pi]$; fie $y = 2\cdot x - 3\pi \in [0,\pi] \Rightarrow 2x = y + 3\pi$; $f(x) = \arccos(\cos(y+3\pi)) = \arccos(-\cos y) = \pi - y = 4\pi - 2x$;	**3p**
	$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi - 2x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ 2x - 2\pi, & x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ 4\pi - 2x, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$,	**1p**

	Fie funcția $F:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} x^2+c_1, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi x-x^2+c_2, & x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right) \\ x^2-2\pi x+c_3, & x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right) \\ 4\pi x-x^2+c_4, & x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] \end{cases}$, unde $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Cum orice primitivă este funcție derivabilă, deci continuă, rezultă că primitiva F este continuă în $\frac{\pi}{2}$, π şi $\frac{3\pi}{2}$.	**1p**
	Aşadar, primitivele funcției f au forma: $F(x)=\begin{cases} x^2+\frac{\pi^2}{2}+c, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi x-x^2+c, & x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right) \\ x^2-2\pi x+2\pi^2+c, & x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right) \\ 4\pi x-x^2-\frac{5\pi^2}{2}+c, & x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] \end{cases}$, $c\in\mathbb{R}$.	**2p**
2.	**a).** $I_1=2$.	**2p**
	Demonstrarea că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit şi monoton.	**2p**

	Calcularea limitei şirului $(I_n)_{n\geq 1}$; $\left\|\sqrt{1+\sin^n x}-1\right\| = \dfrac{\sin^n x}{\sqrt{1+\sin^n x}+1} \leq \dfrac{1}{2}\sin^n x, (\forall)n \geq 1, (\forall)x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, de unde $1-\dfrac{1}{2}\sin^n x \leq \sqrt{1+\sin^n x} \leq 1+\dfrac{1}{2}\sin^n x$, şi integrând aceste inegalităţi între 0 şi $\dfrac{\pi}{2}$ obţinem $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}J_n \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}J_n$, unde $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$ Să demonstrăm că şirul (J_n) este convergent către 0. Şirul (J_n) este monoton descrescator şi mărginit inferior, deci convergent. F integrării prin părţi se ajunge la relaţia de recurenţă $J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-2}, (\forall)n \geq 2,$ şi prin inducţie matematică se arată că $nJ_nJ_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}, (\forall)n \geq 1$, de unde va rez $\mathrm{J_n} \to 0 \Rightarrow$ că şirul (I_n) este convergent către $\dfrac{\pi}{2}$.	**3p**
3.	Demonstrarea cerinţei că $(G,*)$ este grup abelian.	**4p**
	Demonstrarea cerinţei că $(\mathrm{G_n},*)$ subgrup al grupului $(G,*)$.	**1p**
	Rezolvarea ecuaţiei. Soluţiile ecuaţiei sunt $\mathrm{x_1} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ şi $\mathrm{x_2} = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$	**2p**
4.	Fie $B \in M_2(\mathbb{Z}_3)$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soluţie a ecuaţiei date. Determinarea formei matricei B^{2012}.	**4p**
	Determinarea soluţiilor ecuaţiei $B_1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.	**3p**