mate.info.ro
Profu' de mate

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

12 februarie 2011

Clasa a V-a

Problema 1.

La un concurs de matematică la care au participat 300 elevi, s-au dat de rezolvat patru probleme. Ştiind că 295 elevi au rezolvat prima problemă, 238 elevi au rezolvat a doua problemă, 253 elevi au rezolvat a treia problemă şi 117 elevi au rezolvat a patra problemă, câți elevi au rezolvat toate cele patru probleme?

Guiță Visilina, profesor, Galați

Problema 2.

a). Să se demonstreze că numerele 13 şi 169 se pot scrie fiecare ca sumă de patru numere pătrate perfecte.

b). Să se demonstreze că numărul 13^n poate fi scris ca sumă de patru numere pătrate perfecte, pentru orice număr natural nenul n.

Dudău Mitică, profesor, Galați

Problema 3.

Se consideră primele zece numere naturale care sunt, simultan, pătrate perfecte şi cuburi perfecte.

a). Suma celor zece numere de mai sus este divizibilă cu 2 ? Dar cu 5?

b). Să se scrie divizorii şi multiplii numărului natural $k=1+p+\overline{ab}$, unde p este produsul numerelor din enunț, iar $\overline{ab}$ este un număr prim având suma cifrelor maximă.

Duma Vasile, profesor, Galați

Problema 4.

Spunem că numărul natural a este "fratele" numărului natural b dacă $a \neq b$ şi numărul a se obține din rearanjarea cifrelor numărului b. De exemplu, 2011 este fratele lui 1210.

a). Câți frați are numărul $10^{2011}-2$?

b). Dar numărul $10^{2011}-12$?

Baroni Marian, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

mate.info.ro
Profu' de mate

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

12 februarie 2011

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Presupunem că fiecare elev a rezolvat exact 3 probleme.Atunci toți elevii au rezolvat $300\cdot 3$=900 probleme	3p
	Numărul problemelor rezolvate de toți elevii =903.	2p
	Diferența de 903-900=3 probleme reprezintă numărul elevilor care au rezolvat cel puțin 4 probleme. Aşadar cel puțin 3 elevi au rezolvat 4 probleme.	2p
2.	**a).** $13=2^2+2^2+2^2+1^2$;	2p
	169=$13^2=10^2+8^2+2^2+1^2$	2p
	b). $n=2\cdot k+1,\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}$ $13^{2\cdot k+1}=13^{2\cdot k}\cdot 13=\left(13^k\cdot 2\right)^2+\left(13^k\cdot 2\right)^2+\left(13^k\cdot 2\right)^2+\left(13^k\right)^2$;	2p
	$n=2\cdot k,\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}^*$ $13^{2\cdot k}=13^{2k-2}\cdot 13^2=\left(13^{k-1}\cdot 10\right)^2+\left(13^{k-1}\cdot 8\right)^2+\left(13^{k-1}\cdot 2\right)^2+\left(13^{k-1}\right)^2$;	1p
3.	**a).** $S=0^6+1^6+2^6+...+9^6$. $u(S)=0+1+4+9+6+5+6+9+4+1=5$	2p
	$S\,\vdots\,5$, dar S nu se divide cu 2.	1p
	b). $P=0$	1p
	$\overline{\mathrm{ab}}=89$	1p
	$k=90=2\cdot 3^2\cdot 5$; $D_{90}=\{1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45,90\}$; $M_{90}=\{0,90,180,270,360,...\}$	2p
4.	**a).** 2010 frați	3p
	b). 2.021.054 frați	4p

mate.info.ro
Profu' de mate

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
12 februarie 2011

CLASA a VI-a

Problema 1.

a). Să se demonstreze că numărul $n = 237^{567} + 46^{2006} + 18^{2000}$ se divide cu 5.

b). Să se determine numerele de forma $\overline{3a7b}$ divizibile cu 45.

c). Să se determine cea mai mare şi cea mai mică fracție de forma $\frac{\overline{3a7b}}{\overline{1x6y}}$ care se simplifică cu 45.

Problemă selectată de Zamfir Romeo, profesor, Galați

Problema 2.

Să se calculeze media aritmetică ponderată a numerelor naturale de forma $\overline{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, a este număr natural prim, ştiind că numărul $\overline{ab} + \overline{ba} - 3 \cdot (a+b)$ este număr natural pătrat perfect, iar fiecare număr $\overline{ab}$ are ponderea egală cu cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

Solomon Cecilia, profesor, Galați

Problema 3.

Să se compare numerele:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + ... + \frac{2011}{2}$$

$$b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2012}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + ... + \frac{2}{2012}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + ... + \frac{3}{2012}\right) +$$
$$+ ... + \left(\frac{2009}{2010} + \frac{2009}{2011} + \frac{2009}{2012}\right) + \left(\frac{2010}{2011} + \frac{2010}{2012}\right) + \frac{2011}{2012}.$$

Rodica şi Dumitru Balan, profesori, Galați

Problema 4.

În interiorul unghiului $\measuredangle AOD$, se consideră punctele B şi C astfel încât punctul B se află în interiorul unghiului $\measuredangle AOC$, iar a, b, c sunt numere naturale prime care verifică relațiile:

$a \cdot m(\measuredangle BOC) = b \cdot m(\measuredangle AOB)$,

$b \cdot m(\measuredangle COD) = c \cdot m(\measuredangle BOC)$,

$a + 10 \cdot b + 6 \cdot c = 62$.

i). Să se determine numerele naturale prime a, b, c.

ii).Să se determine măsurile unghiurilor $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$, dacă suma măsurilor lor este $126°$.

Problemă prelucrată de Ioana Lefteriu, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

mate.info.ro
Profu' de mate

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

12 februarie 2011

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluție, rezolvare**	**Punctaj**
	a) $u\left(237^{567}\right)=3;\ u\left(46^{2006}\right)=6;\ u\left(18^{2000}\right)=6 \Rightarrow u(n)=5 \Rightarrow n \vdots 5.$	**2p**
	b). $\left.\begin{array}{l}\overline{3a7b} \vdots 45\\ 45=9\cdot 5\\ (4,5)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{3a7b} \vdots 5 \Rightarrow b\in\{0,5\}\\ \overline{3a7b} \vdots 9 \Rightarrow a+b=8\end{array}\right.$; Numerele sunt:3870; 3375	**2p**
1.	c).Fracția se simplifică cu 45 dacă $\overline{3a7b} \vdots 45$ și $\overline{1x6y} \vdots 45$. $\overline{3a7b} \vdots 45 \Rightarrow 3375; 3870.$ $\overline{1x6y} \vdots 45 \Rightarrow 1260$ și $1665.$	**2p**
	Fracția mai mare este $\frac{3870}{1260}$; Fracția mai mică este $\frac{3375}{1665}$.	**1p**
	a,b cifre nenule în sistemul zecimal $\Rightarrow a+b\in\{2,3,4,...,18\}$	**1p**
	$\overline{ab}+\overline{ba}-3\cdot(a+b)=8\cdot(a+b)=4\cdot 2\cdot(a+b)=$ număr pătrat perfect $\Rightarrow$	**2p**
2.	$\left.\begin{array}{l}2\cdot(a+b)= \text{număr par pătrat perfect}\\ 2\cdot(a+b)\in\{4,6,8,...,36\}\end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(a+b)\in\{4,16,36\} \Rightarrow a+b\in\{2,8,18\} \Rightarrow$ $11,17,71,26,62,35,53,44,99$	**2p**
	a= număr prim $\Rightarrow$ numerele sunt: 26, 35, 53,71 care au respectiv ponderile 2,1,1,1. $M_p=42,2.$	**2p**
3.	$a=\frac{1}{2}(1+2+3+...+2011)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2011(2011+1)}{2}=503\cdot 2011;$	**3p**

	$b=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{2011}+\frac{2}{2011}+...+\frac{2010}{2011}\right)+\left(\frac{1}{2012}+\frac{2}{2012}+...+\frac{2011}{2012}\right)=$ $=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(1+2)+\frac{1}{4}(1+2+3)+...+\frac{1}{2011}(1+2+...+2010)+\frac{1}{2012}(1+2+...+2$ $=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+...+\frac{2010}{2}+\frac{2011}{2}=503\cdot 2011.$	**3p**
	$a=b$.	**1p**
4.	**i).** $\left.\begin{array}{l} a+10\cdot b+6\cdot c=62\Rightarrow a=\text{ număr par} \\ a\text{ număr natural prim}\end{array}\right\}\Rightarrow a=2;$	**2p**
	$\left.\begin{array}{l} a+10\cdot b+6\cdot c=62 \\ a=2\end{array}\right\}\Rightarrow 10\cdot b+6\cdot c=60\Rightarrow 5\cdot b+3\cdot c=30;$ $\left.\begin{array}{l} 5\cdot b+3\cdot c=30 \\ 30\text{ număr par}\end{array}\right\}\Rightarrow b,c\text{ numere impare; b=3}\Rightarrow 3\cdot\text{c=15}\Rightarrow c=5.$	**2p**
	ii) $\left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \\ c=5\end{array}\right\}\Rightarrow\ 2\cdot\mathrm{m}(\measuredangle\mathrm{BOC})=3\cdot m(\measuredangle AOB),\ 3\cdot\mathrm{m}(\measuredangle COD)=5\cdot m(\measuredangle BOC),$ $m(\measuredangle AOB)+m(\measuredangle BOC)+m(\measuredangle COD)=126^\circ\Rightarrow$ $m(\measuredangle BOC)=37^\circ 48';\ m(\measuredangle AOB)=25^\circ 12';\ \mathrm{m}(\measuredangle COD)=63^\circ.$	**3p**

mate.info.ro
Profu' de mate

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
12 februarie 2011

Clasa a VII-a

Problema 1.

Să se calculeze expresiile:

a) $E_1 = \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{-3} \right)^2 - \left(\frac{-2^2}{3^2} \right) + (-2)^2 \right]^2 : \left[\left(-\frac{5}{6} \right)^2 - (-1)^3 - 1 \right]$

b) $E_2 = 2 \cdot (-1)^{2 \cdot k} + 3 \cdot (-1)^{2 \cdot k+1} + 4 \cdot (-1)^{2 \cdot k+2} + ... + 2011 \cdot (-1)^{2 \cdot k+2009}$, $\mathrm{k} \in \mathbb{N}^*$.

Problemă selectată de Zamfir Romeo, profesor, Galați

Problema 2.

Spunem că numărul natural a este "aliat " cu numărul natural b dacă $a \neq b$, iar a şi b au cel puțin o cifră comună în scrierea lor în baza zece. De exemplu, 2011 este aliat cu 1, cu 22, cu 200, etc.

Să se demonstreze că în orice submulțime M a mulțimii numerelor naturale, M având zece elemente, există cel puțin două elemente din mulțimea M care au acelaşi număr de aliați în M. (eventual zero aliați).

Conf. dr. Mihaela Baroni, Universitatea Galați
Marian Baroni, profesor Galați

Problema 3.

Pe laturile triunghiului ABC se construiesc $AD \perp AB$, $[AD] \equiv [AB]$, $AE \perp AC$, $[AE] \equiv [AC]$ (punctele D şi C sunt situate în semiplane diferite determinate de dreapta AB, iar punctele B şi E sunt situate în semiplane diferite determinate de dreapta AC).

a) Să se demonstreze că $[BE] \equiv [DC]$.

b) Dacă $AN \perp DE$, $N \in (DE)$ şi $AN \cap BC = \{M\}$, să se demonstreze că punctul M este mijlocul lui (BC).

Petre Bătrânețu, profesor, Galați

Problema 4.

Se dau pătratele ABCD şi BEFG de aceeaşi parte a dreptei AB cu $B \in (AE)$ şi $\mathrm{AE} = 16$ cm. Dacă $\mathrm{BQ} \perp \mathrm{CE}$, $\mathrm{Q} \in \mathrm{CE}, \mathrm{CP} \perp \mathrm{BF}$, $\mathrm{P} \in \mathrm{BE}$ şi $\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QF}} = \frac{3}{5}$, să se determine lungimile AB şi BE.

Manea Maricel, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

mate.info.ro
Profu' de mate

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

12 februarie 2011

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$E_1 = 36$.	3p
	$E_2 = (2-3)+(4-5)+(6-7)+...+(2010-2011) = \underbrace{(-1)+(-1)+(-1)+...+(-1)}_{\text{de 1005 ori}} = -1005$	4p
2.	Fiecare din cele 10 numere poate avea 0, 1, 2,…, 8 sau 9 aliați în mulțimea M. a). Dacă există cel puțin două numere fără aliați, problema este rezolvată.	3p
	b). Dacă un singur număr nu are aliați, rămân 9 numere care pot avea fiecare 1, 2, 3, …, 8 aliați. Conform principiului cutiei, două numere vor avea același număr de aliați.	2p
	c). Dacă nu sunt numere fără aliați, atunci fiecare din cele 10 numere are 1 sau 2 sau 3 sau…sau9 aliați . Rezultă conform principiului cutiei că există două numere care vor avea același număr de aliați.	2p
3.	a). $\Delta ACD \equiv \Delta AEB \begin{cases} [AE] \equiv [AC] \\ \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle EAB \, (L.U.L.) \Rightarrow [CD] \equiv [BE] \\ [AD] \equiv [AB] \end{cases}$	3p

	b).Ducem prin B paralela la AC. Fie P punctul de intersecție al acesteia cu AM. $m(\sphericalangle ABP)+m(\sphericalangle BAC)=180^0$ (interne de aceeaşi parte a secantei). De asemenea $m(\sphericalangle BAC)+m(\sphericalangle DAE)=180^0$ Rezultă că $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle ABP$. $\sphericalangle ADN \equiv \sphericalangle BAP$ deoarece au acelaşi complement $\sphericalangle NAD$. $\Delta DAE \equiv \Delta ABP \begin{cases} [AD]\equiv[AB] \\ \sphericalangle EDA \equiv \sphericalangle BAP \; (U.L.U.) \Rightarrow [BP]\equiv[AE]\equiv[AC]. \\ \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle ABP \end{cases}$ Avem $BP \parallel AC, [BP]\equiv[AC]$,deci patrulaterul $ABPC$ este paralelogram şi prin urmare diagonalele acestuia se înjumătățesc,deci $[BM]\equiv[MC]$.	**4p**
4.	Discuție: 1. $AB<BE$ Din $\left.\begin{matrix} CP\perp BF \\ GE\perp BF \end{matrix}\right\} \Rightarrow PC \parallel GE \Rightarrow \Delta CBP \sim \Delta GBE(\text{isoscel}) \Rightarrow BP=BC \;(1$ Din $\triangle EBQ \sim \triangle ECB \Rightarrow \frac{BQ}{BC}=\frac{QE}{BE} \Leftrightarrow \frac{BQ}{QE}=\frac{BP}{EF} \quad (2)$ În plus $\sphericalangle QBP \equiv \sphericalangle QEF$ (au acelaşi complement $\sphericalangle BEQ$) (3) Din (2) şi $(3) \Rightarrow \Delta QBP \sim \Delta QEF \Rightarrow \frac{BP}{EF}=\frac{BC}{BE}=\frac{PQ}{QF}=\frac{3}{5}$ şi $AB+$ E rezulta : $AB=6cm$ şi $BE = 10cm$.	**4p**
	2. $AB>BE \Rightarrow \frac{AB}{BE}>1$. Din demonstrația de la punctul 1., rezultă $1<\frac{AB}{BE}=\frac{BC}{BE}=\frac{PQ}{QF}=\frac{3}{5}<1 \;(F)$.	**2p**
	3. $AB=BE \Rightarrow 1=\frac{AB}{BE}=\frac{PQ}{QF}=\frac{3}{5}(F)$.	**1p**

mate.info.ro
Profu' de mate

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
12 februarie 2011

Clasa a VIII-a

Problema 1. Să se determine numerele naturale n, pentru care există numerele întregi a, b, c astfel încât $n^2 = a+b+c$ şi $n^3 = a^2+b^2+c^2$.

Guiță Visilina, profesor, Galați

Problema 2. Să se demonstreze că :

a). $\dfrac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}\right)$ şi $k\cdot(k+1)\cdot(k+2) < (k+1)^3$, $k \in \mathbb{N}^*$;

b). $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \dfrac{1}{2009\cdot 2010\cdot 2011} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2010} + \dfrac{1}{2011}\right)$;

c). $1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{2010^3} < \dfrac{5}{4}$.

Popa Vasile, profesor, Galați

Problema 3.

a). Să se descompună în factori expresia $(a^2+2ab-b^2)^2 + (a^2-2ab-b^2)^2$.

b). Vom numi un număr natural "bine plasat" dacă este media aritmetică a două numere naturale pătrate perfecte nenule şi distincte , şi număr natural "foarte bine plasat" dacă este număr natural "bine plasat" şi este pătrat perfect.

i) Să se determine cel mai mic număr natural "bine plasat" şi cel mai mare număr natural "bine plasat" , mai mic sau egal ca 1013.

ii) Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale "foarte bine plasate". Să se determine opt numere naturale nenule p, $p \le 1013$ "foarte bine plasate"**.**

Bătrânețu Petre, profesor, Galați

Problema 4.

Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară cu baza triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ cu $m(\measuredangle A) = 90^\circ$ şi a, b, c sunt respectiv lungimile laturilor $[BC]$, $[AC]$şi $[AB]$ astfel încât $a+b=25$, $a+c=18$, iar punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul $\triangle ABC$. Dacă SI este perpendiculară pe planul bazei (ABC), SM perpendiculară pe BC, $SM = 10\sqrt{2}$, atunci:

a) Să se calculeze a, b, c ;
b) Să se calculeze lungimea SI;
c) Să se calculeze tangenta unghiului diedru determinat de planele (SBC) şi (ABC);
d) Să se calculeze distanța de la punctul I la planul (SBC);
e) Să se calculeze distanța de la punctul B la planul (SAI).

Gusta Constanța, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

mate.info.ro Profu' de mate

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

12 februarie 2011

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluție, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Ridicând la pătrat ambii membrii ai egalității $n^2 = a+b+c$ obținem: $n^4 = a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot a\cdot c$ **(1).**	**1p**
	$2ab+2bc+2ca \le 2a^2+2b^2+2c^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} n^4 \le 3(a^2+b^2+c^2) \overset{ip.}{=} 3n^3$	**2p**
	$n^4 \le 3n^3$ *cu* $n\in\mathbb{N} \Rightarrow n\in\{0,1,2,3\}$; $n=0$ *există* $a=b=c=0$ $n=1$ *există* $a=1,\ b=c=0$ $n=2$ *există* $a=0,\ b=c=2$ $n=3$ *există* $a=b=c=3$	**4p**
2.	a). Se demonstrează cerințele prin calcule.	**3p**
	b). Folosind relația de la punctul a)., pentru k luând valorile 1, 2, 3, …, 2009, obținem egalitatea.	**2p**
	Folosind a doua relație de la punctul a)., obținem inegalitatea	**2p**
3.	**a)** $(a^2+2ab-b^2)^2+(a^2-2ab-b^2)^2 =$ $a^4+4a^2b^2+b^4+4a^3b-4ab^3-2a^2b^2+a^4+4a^2b^2+b^4-4a^3b+4a$ $=2a^4+4a^2b^2+2b^4=2\left(a^4+2a^2b^2+b^4\right)$ $=2(a^2+b^2)^2$	**2p**

mate.info.ro
Profu' de mate

	b) i) Fie $x=\dfrac{m^2+n^2}{2}\le 1013$ un număr "bine plasat".Avem $m^2+n^2\le 2026$. Pătratele perfecte mai mici ca 2026 sunt $1^2, 2^2, 3^2, ..., 44^2, 45^2$.Pentru ca media aritmetică a două numere naturale să fie număr natural ele trebuie să aibă aceeaşi paritate. Cel mai mic număr "bine plasat"este deci $\dfrac{1^2+3^2}{2}=5$ Avem $1013=\dfrac{1+2025}{2}=\dfrac{1^2+45^2}{2}$ deci cel mai mare număr "bine plasat" este 1013.	2p
	ii)Din relația de la punctul a) avem că: $(a^2+b^2)^2=\dfrac{(a^2+2ab-b^2)^2+(a^2-2ab-b^2)^2}{2}$ Deci numerele $m=a^2+2ab-b^2$ şi $n=a^2-2ab-b^2$ generează numere "foarte bine plasate". Înseamnă că există o infinitate de astfel de numere.	1
	Pentru a găsi numerele $p\le 1013$ "foarte bine plasate" trebuie ca: $a^2+b^2\le 31, (31^2=961<1013<32^2=1024)$ Avem $(a,b)\in\{(5,1),(5,2),(4,1),(4,2),(4,3),(3,1),(3,2),(2,1)\}$ 8 numere $p\le 1013$ "foarte bine plasate". Acestea sunt $(5^2+1^2)^2=26^2=676$, $(5^2+2^2)^2=29^2=841$, $(4^2+1^2)^2=17^2=289$, $(4^2+2^2)^2=20^2=400, (4^2+3^2)^2=25^2=625$, $(3^2+1^2)^2=100, (3^2+2^2)^2=169$	2p
4.	**a).** $\left.\begin{array}{l}(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot a\cdot c\\ \text{Conform teoremei lui Pitagora}\Rightarrow c^2+b^2=a^2\end{array}\right\}\Rightarrow$ $(a+b+c)^2=2\cdot a^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot a\cdot c\Rightarrow$ $(a+b+c)^2=2\cdot(a+b)\cdot(a+c)\Rightarrow(a+b+c)^2=2\cdot 25\cdot 18\Rightarrow$ $a+b+c=30\Rightarrow\begin{cases}b=12\\c=5\\a=13\end{cases}$	1p

mate.info.ro
Profu' de mate

	$\left.\begin{array}{l} SI \perp (ABC) \\ IM \perp BC \\ IM, BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SM \perp BC (T.3.\perp);$ b). $\left.\begin{array}{l} SI \perp (ABC) \\ IM \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SI \perp IM;$ $S = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow S = 30; r = \frac{S}{p};\ p{=}15; r = 2$ $\triangle SIM \left(m(\measuredangle SIM) = 90^\circ \right) \Rightarrow SI = 14;$	**1p**
	c). $\left.\begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC,\ SM \subset (SBC) \\ IM \perp BC,\ IM \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle\left((SBC);(ABC)\right) = \measuredangle IMS$ $\triangle SIM \left(m(SIM) = 90^\circ \right) \Rightarrow tg(\measuredangle M) = \frac{SI}{IM} = 7.$	**2p**
	d) $\left.\begin{array}{l} IM \perp BC \\ SM \perp BC \\ IQ \perp SM \end{array}\right\} \Rightarrow IQ \perp (SBC) \Rightarrow d\left(I,(SBC)\right) = IQ;$ $\left.\begin{array}{l} \triangle SIM \left(m(I) = 90^\circ \right) \\ IQ \perp SM \end{array}\right\} \Rightarrow IQ = \frac{SI \cdot IM}{SM} \Rightarrow IQ = \frac{14 \cdot 2}{10 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow IQ = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{5}.$	**2p**
	e). Construim $BD \perp AI$ **.** $\left.\begin{array}{l} SI \perp (ABC) \\ BD \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SI \perp BD;$ $\left.\begin{array}{l} BD \perp SI \\ BD \perp AI \\ SI \cap AI = \{I\} \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow d\left(B;(SAI)\right) = BD;$ $[AI$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC \Rightarrow m(\measuredangle BAI) = 45^\circ;$ $\left.\begin{array}{l} BD \perp AI \Rightarrow \triangle BDA \text{ este dreptunghic, isoscel} \\ AB = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow BD = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}.$	**1p**